量子力学 III

―― 場の量子論入門 ――

井上 研三

平成27年10月16日

目 次

第1章 序 1
1.1 場とは？ 1
1.2 量子力学のおさらい 1
1.3 空間の対称性と保存則 4
1.4 粒子のスピン角運動量 7

第2章 同種粒子と粒子の統計性 11
2.1 同種粒子系 11
2.2 粒子間相互作用のない系 12

第3章 Schrödinger 場の量子論 15
3.1 Schrödinger 波動関数の第2量子化（bose 粒子系） 15
3.2 fermi 粒子系の記述 20
3.3 多粒子系の量子力学の記述との対応 21
3.4 場の相互作用 23

第4章 相対論的波動方程式 25
4.1 Schrödinger 波動方程式の相対論的拡張 25
4.2 Klein-Gordon 方程式 26
4.3 Dirac 方程式 28
4.4 Dirac 方程式の相対論的共変性 29

第5章 Dirac の電子論 31
5.1 電子のスピン 31
5.2 Dirac 方程式の平面波解 32
5.3 ホール理論と陽電子 33
5.4 電磁場中の Dirac 方程式 34
5.5 非相対論的極限と電子の磁気モーメント 36

第6章 終章 — 相対論的場の量子論 — 43
6.1 粒子と反粒子 43
6.2 量子 Dirac 場 44
6.3 Klein-Gordon 場（ボーズ統計） 46
6.4 電磁場 48

第1章　序

1.1　場とは？

場：空間の各点 $\mathbf{x}$ に力学的自由度 $\varphi(\mathbf{x})$

電磁場：$\mathbf{E}(\mathbf{x}), \mathbf{B}(\mathbf{x}) \quad \text{or} \quad A^\mu(\mathbf{x}) \equiv (\phi(\mathbf{x}), \mathbf{A}(\mathbf{x}))$

物質場：$\left(\begin{array}{l} \text{質点の量子力学の力学量は } \hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{p}} \\ \psi(\mathbf{x}) \text{ は状態を表わす単なる波動関数だった} \end{array} \right)$

$$\Downarrow \quad \longleftarrow \quad \text{第 2 量子化}$$

$\psi(\mathbf{x})$ を力学量としての場と見なすことができる。

場の運動（時間発展）：$\varphi(\mathbf{x}, t)$

$$\varphi(\mathbf{x}, t) \text{ の満たす運動方程式：} \left\{ \begin{array}{l} \text{Maxwell 方程式} \\ \text{Schrödinger 方程式} \end{array} \right\}$$

場の量子化：$\hat{\varphi}(\mathbf{x})$　量子力学的演算子（$\mathbf{x}$, t ともにパラメター ）

$$\hat{\varphi}(\mathbf{x}) \text{ の固有振動モードの励起} \Longrightarrow \text{ 粒子性 } \left\{ \begin{array}{l} \text{光子} \\ \text{電子} \end{array} \right\}$$

$$\Downarrow$$

粒子の生成、消滅を伴う多粒子系の量子力学的記述

「特に素粒子の世界（量子力学 + 相対性理論）の記述には不可欠な理論」

1.2　量子力学のおさらい

- 量子系の状態：　$|\psi(t)\rangle$　状態ベクトル（ケット）
- 運動：　Schrödinger 方程式

$$i\hbar \frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = \hat{H}|\psi(t)\rangle \;\; ; \; \hat{H} : \text{Hamiltonian 演算子（エルミート} \hat{H}^\dagger = \hat{H}\text{）}$$

$|\psi(t=0)\rangle$ を与えれば $|\psi(t)\rangle$ は一意的に定まる。

例： 調和振動子

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{P}^2 + \frac{1}{2}k\hat{Q}^2 \qquad \begin{cases} \hat{Q} \ : \ \text{座標演算子} \\ \hat{P} \ : \ \text{運動量演算子} \end{cases}$$

$$[\ \hat{Q}, \hat{P}\ ] = i\hbar \qquad : \quad \text{正準交換関係}$$

- 波動関数

$$\hat{Q}|q\rangle = q|q\rangle \quad : \ \text{演算子 } \hat{Q} \text{ の固有ベクトル} \qquad \langle q|q'\rangle = \delta(q-q')$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dq|q\rangle\langle q| = \hat{1} \quad : \quad |q\rangle \text{ の完全性} \quad q:\text{実数} \leftrightarrow \hat{Q}^\dagger = \hat{Q} \ \ \text{エルミート}$$

$$|\psi(t)\rangle = \int dq|q\rangle\langle q|\psi(t)\rangle \qquad \Leftarrow \qquad |q\rangle \ \ \text{による展開}$$

$$\psi(q,t) \equiv \langle q|\psi(t)\rangle \quad : \quad q\text{-表示の波動関数}$$

- $\psi(q,t)$ の時間発展

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(q,t) = \langle q|i\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = \langle q|\hat{H}|\psi(t)\rangle$$

$$\hat{H} = H(\hat{Q},\hat{P})$$

$$\begin{aligned} \langle q|\hat{Q}|\psi(t)\rangle &= q\langle q|\psi(t)\rangle, & \langle q|\hat{Q}^n|\psi(t)\rangle &= q^n\langle q|\psi(t)\rangle \\ \langle q|\hat{P}|\psi(t)\rangle &= -i\hbar\frac{\partial}{\partial q}\langle q|\psi(t)\rangle, & \langle q|\hat{P}^n|\psi(t)\rangle &= \left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial q}\right)^n\langle q|\psi(t)\rangle \end{aligned}$$

証明：公式 $e^{\hat{A}}\hat{B}e^{-\hat{A}} = \hat{B} + [\hat{A},\hat{B}] + \frac{1}{2!}[\hat{A},[\hat{A},\hat{B}]] + \frac{1}{3!}[\hat{A},[\hat{A},[\hat{A},\hat{B}]]] + \cdots$ により

$$e^{i\frac{a}{\hbar}\hat{P}}\hat{Q}e^{-i\frac{a}{\hbar}\hat{P}} = \hat{Q} + i\frac{a}{\hbar}[\hat{P},\hat{Q}]\underbrace{+\cdots}_{=0} = \hat{Q} + a$$

$$\begin{aligned} \hat{Q}e^{-i\frac{a}{\hbar}\hat{P}}|q\rangle &= e^{-i\frac{a}{\hbar}\hat{P}}e^{i\frac{a}{\hbar}\hat{P}}\hat{Q}e^{-i\frac{a}{\hbar}\hat{P}}|q\rangle = e^{-i\frac{a}{\hbar}\hat{P}}(\hat{Q}+a)|q\rangle \\ &= (q+a)e^{-i\frac{a}{\hbar}\hat{P}}|q\rangle \end{aligned}$$

$$\therefore \qquad e^{-i\frac{a}{\hbar}\hat{P}}|q\rangle = |q+a\rangle \qquad \begin{cases} e^{-i\frac{a}{\hbar}\hat{P}}\text{は } q \text{ を } a \text{ だけ並進} \\ \text{する演算子 (} a \text{ は実数とする)} \end{cases}$$

$$\langle q|e^{i\frac{a}{\hbar}\hat{P}} = \langle q+a|$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial q}\langle q|\psi(t)\rangle &= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}\{\langle q+\epsilon|\psi(t)\rangle - \langle q|\psi(t)\rangle\}\\ &= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}\{\langle q|\underbrace{e^{i\frac{\epsilon}{\hbar}\hat{P}}}_{=1+i\frac{\epsilon}{\hbar}\hat{P}+O(\epsilon^2)}|\psi(t)\rangle - \langle q|\psi(t)\rangle\}\\ &= i\frac{1}{\hbar}\langle q|\hat{P}|\psi(t)\rangle \qquad \text{証明終}\end{aligned}$$

よって $\langle q|H(\hat{Q},\hat{P})|\psi(t)\rangle = H(q,-i\hbar\frac{\partial}{\partial q})\langle q|\psi(t)\rangle$

$$\therefore\quad i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(q,t) = H(q,-i\hbar\frac{\partial}{\partial q})\psi(q,t)$$

<u>例１</u>：調和振動子：$\hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{P}^2 + \frac{1}{2}k\hat{Q}^2$, $[\hat{Q},\hat{P}] = i\hbar$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(q,t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial q^2} + \frac{1}{2}kq^2\right]\psi(q,t)$$

<u>例２</u>：ポテンシャル $V(\mathbf{x})$ 中の質点：$\hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{\mathbf{p}}^2 + V(\mathbf{x})$, $[\hat{x}_i,\hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij}$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\mathbf{x},t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\mathbf{x})\right]\psi(\mathbf{x},t)$$

- 物理量 $\hat{O} = O(\hat{Q},\hat{P})$ の時刻 t における期待値

$$\langle O(t)\rangle \equiv \langle\psi(t)|\hat{O}|\psi(t)\rangle \qquad : \ \text{Schrödinger 描像}$$

q-表示では

$$\begin{aligned}\langle\psi(t)|O(\hat{Q},\hat{P})|\psi(t)\rangle &= \langle\psi(t)|\int_{-\infty}^{\infty}dq|q\rangle\langle q|O(\hat{Q},\hat{P})|\psi(t)\rangle\\ &= \int dq\langle\psi(t)|q\rangle O(q,-i\hbar\frac{\partial}{\partial q})\langle q|\psi(t)\rangle\\ &= \int dq\psi^*(q,t)O(q,-i\hbar\frac{\partial}{\partial q})\psi(q,t)\end{aligned}$$

- Heisenberg 描像

$$\text{Schrödinger 方程式}\qquad i\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = \hat{H}|\psi(t)\rangle$$

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\frac{1}{\hbar}\hat{H}t}|\psi(t=0)\rangle$$

（ここに $\hat{H} = H(\hat{Q},\hat{P})$ は t には陽に依存しないとする）

$$\begin{aligned}\langle O(t)\rangle &= \langle\psi(t)|\hat{O}|\psi(t)\rangle\\ &= \langle\psi(0)|e^{i\frac{1}{\hbar}\hat{H}t}\hat{O}e^{-i\frac{1}{\hbar}\hat{H}t}|\psi(0)\rangle\\ &\equiv \langle\psi(0)|\hat{O}(t)|\psi(0)\rangle\\ \hat{O}(t) &\equiv e^{i\frac{1}{\hbar}\hat{H}t}\hat{O}e^{-i\frac{1}{\hbar}\hat{H}t} \qquad : \text{Heisenberg 描像の演算子}\end{aligned}$$

ハミルトニアンは $\hat{H}(t) = \hat{H}$ に注意

$\hat{O}(t)$ の時間発展は

$$\frac{d}{dt}\hat{O}(t) = i\frac{1}{\hbar}\hat{H}e^{i\frac{1}{\hbar}\hat{H}t}\hat{O}e^{-i\frac{1}{\hbar}\hat{H}t} - e^{i\frac{1}{\hbar}\hat{H}t}\hat{O}e^{-i\frac{1}{\hbar}\hat{H}t}i\frac{1}{\hbar}\hat{H}$$

すなわち

$$\frac{d}{dt}\hat{O}(t) = i\frac{1}{\hbar}[\hat{H}(t), \hat{O}(t)] \qquad : \text{Heisenberg の運動方程式}$$

$$\text{初期条件}\quad \hat{O}(t=0) = \hat{O}$$

状態は $t = 0$ で指定して、物理量 O が時間発展しているように見る。

★ Schrödinger 描像の演算子 $\hat{O}_1$ と $\hat{O}_2$ の積 $\hat{O}_1\hat{O}_2$ の Heisenberg 描像での演算子は

$$(\hat{O}_1\hat{O}_2)(t) \equiv e^{i\frac{1}{\hbar}\hat{H}t}\hat{O}_1\hat{O}_2e^{-i\frac{1}{\hbar}\hat{H}t} = e^{i\frac{1}{\hbar}\hat{H}t}\hat{O}_1e^{-i\frac{1}{\hbar}\hat{H}t}e^{i\frac{1}{\hbar}\hat{H}t}\hat{O}_2e^{-i\frac{1}{\hbar}\hat{H}t} = \hat{O}_1(t)\hat{O}_2(t)$$

特に

$$[\hat{O}_1, \hat{O}_2] = i\hbar\hat{O}_3 \quad \Rightarrow \quad [\hat{O}_1(t), \hat{O}_2(t)] = i\hbar\hat{O}_3(t)$$

$$[\hat{Q}, \hat{P}] = i\hbar \quad \Rightarrow \quad [\hat{Q}(t), \hat{P}(t)] = i\hbar$$

★ $\hat{H}$ と可換な演算子 $[\hat{O}, \hat{H}] = 0$

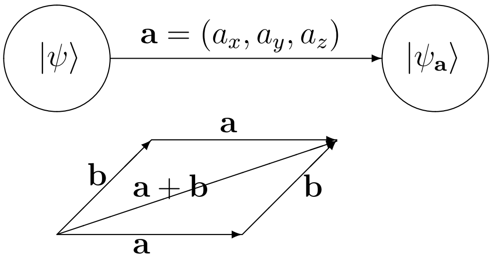
$$\frac{d}{dt}\hat{O}(t) = 0 \qquad\qquad \hat{O}\text{ は } t \text{ によらない保存量}$$

1.3　空間の対称性と保存則

空間の一様性

座標原点をどこにとっても同じ空間 $\Longrightarrow$ 状態の並進操作

$$|\psi\rangle \;\rightarrow\; |\psi_{\mathbf{a}}\rangle = \hat{U}_{\mathrm{T}}(\mathbf{a})|\psi\rangle$$



- $\hat{U}_{\mathrm{T}}(\mathbf{a})\hat{\mathbf{U}}_{\mathrm{T}}(\mathbf{b}) = \hat{\mathbf{U}}_{\mathrm{T}}(\mathbf{b})\hat{\mathbf{U}}_{\mathrm{T}}(\mathbf{a}) = \hat{\mathbf{U}}_{\mathrm{T}}(\mathbf{a}+\mathbf{b})$

$$\hat{U}_{\mathrm{T}}(\mathbf{a}) = \mathbf{e}^{-\mathbf{i}\frac{1}{\hbar}\mathbf{a}\cdot\hat{\mathbf{P}}}$$

$$\hat{\mathbf{P}} = (\hat{P}_x,\ \hat{P}_y,\ \hat{P}_z), \qquad [\hat{P}_i,\ \hat{P}_j] = 0 \quad (i, j = x, y, z)$$

$$\hat{\mathbf{P}}\ :\ \text{系の全運動量演算子}$$

例

- $\hat{\mathbf{x}},\ \hat{\mathbf{p}}$ の一粒子系：　$\hat{\mathbf{P}} = \hat{\mathbf{p}}$;　$\hat{\mathbf{x}}|\mathbf{x}\rangle = \mathbf{x}|\mathbf{x}\rangle,\ e^{-i\frac{1}{\hbar}\mathbf{a}\cdot\hat{\mathbf{p}}}|\mathbf{x}\rangle = |\mathbf{x}+\mathbf{a}\rangle$
- N 粒子系 $\hat{\mathbf{x}}_i,\ \hat{\mathbf{p}}_i\ (i = 1, 2, \cdots, N)$:　$\hat{\mathbf{P}} = \sum_{i=1}^{N} \hat{\mathbf{p}}_i$

一様空間内の力学系 : Hamiltonian を $\hat{H}$ とする。

運動 $|\psi(t)\rangle$ が実現されれば、必ず $|\psi_{\mathbf{a}}(t)\rangle = \hat{U}_{\mathrm{T}}(\mathbf{a})|\psi(t)\rangle$ も実現される。

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = \hat{H}|\psi(t)\rangle, \quad i\hbar\frac{d}{dt}|\psi_{\mathbf{a}}(t)\rangle = \hat{H}|\psi_{\mathbf{a}}(t)\rangle$$

$$\hat{U}_{\mathrm{T}}^{-1}(\mathbf{a})\times \quad \Downarrow$$

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = \hat{U}_{\mathrm{T}}^{-1}(\mathbf{a})\hat{H}\hat{U}_{\mathrm{T}}(\mathbf{a})|\psi(t)\rangle$$

$$\therefore \quad \hat{U}_{\mathrm{T}}^{-1}(\mathbf{a})\hat{H}\hat{U}_{\mathrm{T}}(\mathbf{a}) = e^{i\frac{1}{\hbar}\mathbf{a}\cdot\hat{\mathbf{P}}}\hat{H}e^{-i\frac{1}{\hbar}\mathbf{a}\cdot\hat{\mathbf{P}}} = \hat{H}$$

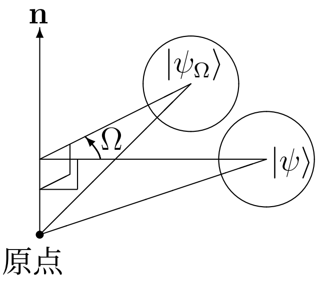
すなわち　$[\hat{\mathbf{P}}, \hat{H}] = 0$　　全運動量の保存則　$\dfrac{d}{dt}\hat{\mathbf{P}} = 0$

空間の等方性

座標軸をどの方向にとってみても同じ空間　⇒　状態の回転操作 (rotation)

$$|\psi_\Omega\rangle = \hat{U}_{\mathrm{R}}(\boldsymbol{\Omega})|\psi\rangle$$

$$\boldsymbol{\Omega} = \Omega\mathbf{n}\begin{cases}\mathbf{n}:\ \text{回転軸の単位ベクトル}\\ \Omega\ :\ \text{回転角 (radian)}\end{cases}$$



$$\hat{U}_{\mathrm{R}}(\Omega_2\mathbf{n})\hat{U}_{\mathrm{R}}(\Omega_1\mathbf{n}) = \hat{U}_{\mathrm{R}}((\Omega_1+\Omega_2)\mathbf{n}) \qquad \text{同一軸回りの回転の合成}$$

$$\hat{U}_{\mathrm{R}}(\boldsymbol{\Omega}) = e^{-i\frac{1}{\hbar}\boldsymbol{\Omega}\cdot\hat{\mathbf{J}}}$$

$$\hat{\mathbf{J}} = (\hat{J}_x, \hat{J}_y, \hat{J}_z) \quad : \quad \text{系の全角運動量演算子}$$

$$[\hat{J}_x, \hat{J}_y] = i\hbar\hat{J}_z, \quad [\hat{J}_y, \hat{J}_z] = i\hbar\hat{J}_x, \quad [\hat{J}_z, \hat{J}_x] = i\hbar\hat{J}_y$$

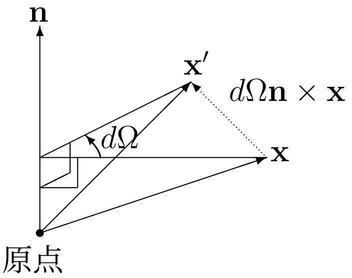
例

- $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{p}}$ の一粒子系 ：$\hat{\mathbf{J}} = \hat{\mathbf{L}} = \hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{p}}$　軌道角運動量

微小回転　$d\boldsymbol{\Omega} = d\Omega\mathbf{n}$　　$\hat{U}_{\mathrm{R}}(d\boldsymbol{\Omega}) = e^{-\frac{i}{\hbar}d\Omega\mathbf{n}\cdot\hat{\mathbf{L}}}$

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}\hat{U}_{\rm R}(d\boldsymbol{\Omega})|\mathbf{x}\rangle &= \hat{U}_{\rm R}\,\underbrace{\hat{U}_{\rm R}^{-1}\hat{\mathbf{x}}\hat{U}_{\rm R}}\,|\mathbf{x}\rangle \\ &= \hat{\mathbf{x}} + \underbrace{[\frac{i}{\hbar}d\Omega\mathbf{n}\cdot\hat{\mathbf{L}},\hat{\mathbf{x}}]}_{\substack{\| \quad \leftarrow \quad [\hat{L}_x,\hat{y}]=i\hbar\hat{z},\ \cdots \\ d\Omega\mathbf{n}\times\hat{\mathbf{x}}}} + O(d\Omega^2)\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \hat{\mathbf{x}}\hat{U}_{\rm R}|\mathbf{x}\rangle = (\mathbf{x}+d\Omega\mathbf{n}\times\mathbf{x})\hat{U}_{\rm R}|\mathbf{x}\rangle$$



すなわち $\hat{U}_{\rm R}|\mathbf{x}\rangle = |\mathbf{x}+d\Omega\mathbf{n}\times\mathbf{x}\rangle \equiv |\mathbf{x}'\rangle$

有限回転は微小回転の積み重ね

$$d\Omega \quad \rightarrow \quad \Omega$$

· N 粒子系：

$$\hat{\mathbf{x}}_i,\ \hat{\mathbf{p}}_i,\ \hat{\mathbf{L}}_i = \hat{\mathbf{x}}_i\times\hat{\mathbf{p}}_i \quad (i=1,\cdots,N)\ ;\quad \hat{\mathbf{J}} = \sum_{i=1}^{N}\hat{\mathbf{L}}_i$$

二つの回転 $\boldsymbol{\Omega}_1$, $\boldsymbol{\Omega}_2$ の合成 ⇒ やはり回転 $\boldsymbol{\Omega}_3$

Hausdorf の公式

$$e^Ae^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]+\frac{1}{12}[A,[A,B]]+\frac{1}{12}[B,[B,A]]+\cdots}$$

$$\hat{U}_{\rm R}(\boldsymbol{\Omega}_2)\hat{U}_{\rm R}(\boldsymbol{\Omega}_1) = \hat{U}_{\rm R}(\boldsymbol{\Omega}_3) \quad \Leftarrow \quad [\hat{J}_x,\hat{J}_y] = i\hbar\hat{J}_z,\cdots$$

$$\boldsymbol{\Omega}_3(\boldsymbol{\Omega}_1,\boldsymbol{\Omega}_2) = \boldsymbol{\Omega}_1+\boldsymbol{\Omega}_2-\frac{1}{2}(\boldsymbol{\Omega}_1\times\boldsymbol{\Omega}_2)+\cdots$$

$\hbar$は消える。

等方空間内の力学系

$|\psi(t)\rangle$, $|\psi_\Omega(t)\rangle$ 共に同じシュレディンガー方程式によって実現される。

$$\therefore \quad \hat{U}_{\rm R}^{-1}(\boldsymbol{\Omega})\hat{H}\hat{U}_{\rm R}(\boldsymbol{\Omega}) = \hat{H}$$

$$\Downarrow$$

$$[\hat{\mathbf{J}},\hat{H}] = 0$$

全角運動量 $\hat{\mathbf{J}}$ の保存則

1.4　粒子のスピン角運動量

１粒子系の状態

$$|\psi\rangle = |\ \text{軌道運動状態；粒子固有の「向き」の自由度}\ \rangle$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Updownarrow$$

$$\mathbf{x},\ \mathbf{p} \qquad\qquad \text{直観的には粒子の自転（スピン）}$$

状態の回転：　$\hat{U}_{\rm R} = e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{\Omega}\cdot\hat{\mathbf{J}}}$

$$\hat{\mathbf{J}} \quad = \quad \hat{\mathbf{L}} \quad + \quad \hat{\mathbf{S}} \qquad\qquad \hat{\mathbf{S}} = (\hat{S}_x,\ \hat{S}_y,\ \hat{S}_z)$$

$$\Uparrow \qquad\qquad \Uparrow \qquad\qquad\qquad \text{スピン角運動量}$$

$$\text{軌道状態の回転} \qquad \text{粒子の「向き」の状態の回転}$$

$$[\hat{\mathbf{S}}, \hat{\mathbf{x}}] = 0\ , \quad [\hat{\mathbf{S}}, \hat{\mathbf{p}}] = 0\ , \quad [\hat{\mathbf{S}}, \hat{\mathbf{L}}] = 0$$

$$[\hat{J}_x, \hat{J}_y] = i\hbar\hat{J}_z\ ,\ \cdots \quad \Rightarrow \quad [\hat{S}_x, \hat{S}_y] = i\hbar\hat{S}_z\ ,\ \cdots$$

$$\hat{\mathbf{S}}^2 \equiv \hat{S}_x^2 + \hat{S}_y^2 + \hat{S}_z \quad : \quad \text{あらゆる演算子と可換}$$

$$\Downarrow$$

$$\text{質量とともに粒子を特徴付ける基本的な量}$$

角運動量の一般論により

$$\hat{\mathbf{S}}^2 = s(s+1)\hbar^2 \qquad s\ :\ \text{整数もしくは半整数}\ (s \geq 0)$$

$\hat{S}_z$ の固有状態は

$$\hat{S}_z|\lambda\rangle = \lambda\hbar|\lambda\rangle \qquad \lambda = \underbrace{-s, -s+1,\ \cdots\ , s}_{2s+1\ \text{個の状態}}$$

$$\left\{\begin{array}{llll} \text{スピン}\,0 & s=0 & \lambda=0 & :\ \pi\text{中間子}\ ,\ \cdots \\ \text{スピン}\frac{1}{2} & s=\frac{1}{2} & \lambda=\pm\frac{1}{2} & :\ \text{電子，陽子，中性子，ニュートリノ，}\cdots \\ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot & & & \end{array}\right.$$

１粒子状態 $|\psi\rangle$ の波動関数

$\hat{\mathbf{x}}$ と $\hat{S}_z$ の同時固有状態

$$\hat{\mathbf{x}}|\mathbf{x}, \lambda\rangle = \mathbf{x}|\mathbf{x}, \lambda\rangle\ , \quad \hat{S}_z|\mathbf{x}, \lambda\rangle = \lambda\hbar|\mathbf{x}, \lambda\rangle$$

$$\langle\mathbf{x}, \lambda|\mathbf{x}', \lambda'\rangle = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}')\delta_{\lambda\lambda'}$$

波動関数

$$\psi_\lambda(\mathbf{x}) \equiv \langle \mathbf{x}, \lambda | \psi \rangle \quad : \quad 2s+1\text{ 個の波動関数 } \psi(\mathbf{x}) \equiv \begin{pmatrix} \psi_s(\mathbf{x}) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \psi_{-s}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

$$\text{規格化} \ : \quad 1 = \langle \psi | \psi \rangle = \sum_{\lambda=-s}^{s} \int d^3\mathbf{x} \psi_\lambda^*(\mathbf{x}) \psi_\lambda(\mathbf{x}) \equiv \int d^3\mathbf{x} \psi^\dagger(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x})$$

$\hat{\mathbf{S}}|\psi\rangle$ の波動関数は

$$\langle \mathbf{x}, \lambda | \hat{\mathbf{S}} | \psi \rangle = \underbrace{\underbrace{\langle \mathbf{x}, \lambda | \hat{\mathbf{S}}} \sum_{\lambda'} \int d^3\mathbf{x}' \underbrace{| \mathbf{x}', \lambda' \rangle}}_{\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\langle \lambda | \hat{\mathbf{S}} | \lambda' \rangle} \langle \mathbf{x}', \lambda' | \psi \rangle$$

$$= \sum_{\lambda'} \langle \lambda | \hat{\mathbf{S}} | \lambda' \rangle \langle \mathbf{x}, \lambda' | \psi \rangle$$

$$(\mathbf{S})_{\lambda\lambda'} \equiv \langle \lambda | \hat{\mathbf{S}} | \lambda' \rangle \quad : \quad (2s+1) \times (2s+1) \text{ スピン行列}$$

$$\langle \mathbf{x}, \lambda | \hat{\mathbf{S}} | \psi \rangle = \sum_{\lambda'} (\mathbf{S})_{\lambda\lambda'} \psi_{\lambda'}(\mathbf{x}) = (\mathbf{S}\psi(\mathbf{x}))_\lambda$$

★ 行列 $\mathbf{S}$ は $\hat{\mathbf{S}}$ と同じ交換関係を満たす。

$$[S_x, S_y] = i\hbar S_z \ , \ \cdots$$

Schrödinger 方程式　　$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{S}}) |\psi(t)\rangle$

$$\Downarrow$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{x}, t) = H(\mathbf{x}, -i\hbar\nabla, \mathbf{S}) \psi(\mathbf{x}, t)$$

$$\psi(\mathbf{x}, t) \equiv \begin{pmatrix} \psi_s(\mathbf{x}, t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \psi_{-s}(\mathbf{x}, t) \end{pmatrix} \quad ; \quad \psi_\lambda(\mathbf{x}, t) \equiv \langle \mathbf{x}, \lambda | \psi(t) \rangle$$

<u>スピン 0</u>　$s = 0$　$\mathbf{S} = 0$　$\psi(\mathbf{x})$

<u>スピン $\frac{1}{2}$</u>　$s = \frac{1}{2}$　$\mathbf{S} = \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma}$　$\psi = \begin{pmatrix} \psi_{1/2}(\mathbf{x}) \\ \psi_{-1/2}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{ spin up} \\ \leftarrow \text{ spin down} \end{matrix}$

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ , \ \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \ , \ \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{Pauli のスピン行列}$$

スピン 1 $s=1$

$$S_x=\frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\quad S_y=\frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&-i&0\\i&0&-i\\0&i&0\end{pmatrix},\quad S_z=\hbar\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

$$\psi=\begin{pmatrix}\psi_1(\mathbf{x})\\\psi_0(\mathbf{x})\\\psi_{-1}(\mathbf{x})\end{pmatrix}$$

問題 これらの $\mathbf{S}$ の交換関係および $\mathbf{S}^2=s(s+1)\hbar^2$ を確かめよ。

粒子のスピン磁気モーメント (このノートでは、電磁気学の単位系としてヘビサイド・ローレンツの有理化単位系を用いる)

一定一様磁場 $\mathbf{B}$ 中の荷電粒子（質量 m, 電荷 e） c：光速

$$\hat{H}=\frac{1}{2m}\left(\hat{\mathbf{p}}-\frac{e}{c}\mathbf{A}(\hat{\mathbf{x}})\right)^2 \qquad \begin{cases}\mathbf{A}(\mathbf{x})=\frac{1}{2}\mathbf{B}\times\mathbf{x} & :\text{ベクトルポテンシャル}\\ \mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A}\end{cases}$$

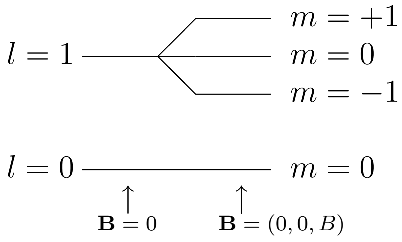
$$=\frac{1}{2}\hat{\mathbf{p}}^2-\frac{e}{2mc}(\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{A}(\hat{\mathbf{x}})+\mathbf{A}(\hat{\mathbf{x}})\cdot\hat{\mathbf{p}})+\underbrace{\frac{e^2}{2mc^2}\mathbf{A}(\hat{\mathbf{x}})^2}_{\text{無視}}$$

$$\hat{H}_{\text{int}}=-\frac{e}{2mc}(\hat{\mathbf{x}}\times\hat{\mathbf{p}})\cdot\mathbf{B}\equiv-\hat{\boldsymbol{\mu}}_{\text{orb.}}\cdot\mathbf{B}$$

$$\hat{\boldsymbol{\mu}}_{\text{orb.}}=\frac{e}{2mc}\hat{\mathbf{L}}\ :\ \text{軌道運動に伴う磁気モーメント}$$

磁場による原子の縮退レベルの分離 $|l,m\rangle$

ゼーマン効果

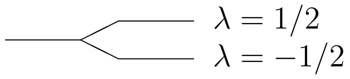


スピン角運動量を持った粒子 ⇒ 固有のスピン磁気モーメント $\boldsymbol{\mu}\propto\mathbf{S}$

$$\hat{\boldsymbol{\mu}}\equiv\mu\frac{1}{s\hbar}\hat{\mathbf{S}} \qquad :\ \hat{\mu}_z\ \text{の固有値の最大値を}\ \mu\ \text{とする}$$

$$\hat{H}=\frac{1}{2m}\left(\hat{\mathbf{p}}-\frac{e}{c}\mathbf{A}(\hat{\mathbf{x}})\right)^2-\hat{\boldsymbol{\mu}}\cdot\mathbf{B} \quad\Rightarrow\quad \text{スピンによる異常ゼーマン効果}$$

スピン 1/2 の場合 $\boldsymbol{\mu}=\mu\boldsymbol{\sigma}$ $s=\frac{1}{2}$



$$\begin{cases}\mu_{\text{電子}}=1.00115965\cdots\times\frac{e\hbar}{2m_ec} \quad (e=-|e_0|) \qquad |e_0|:\ \text{素電荷}\\[2ex] \mu_{\text{陽子}}=2.7928\cdots\times\frac{|e_0|\hbar}{2m_{\text{p}}c} \quad (e=|e_0|)\\[2ex] \mu_{\text{中性子}}=-1.9130\cdots\times\frac{|e_0|\hbar}{2m_{\text{n}}c} \quad (e=0)\end{cases}$$

第2章　同種粒子と粒子の統計性

2.1　同種粒子系

１粒子 : 質量 m, スピン s,　$(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{S}}) \equiv \hat{O},\ \hat{H}(\hat{O})$

$$\hat{\mathbf{x}}\text{と}\hat{S}_z\text{の同時固有状態}\quad |\mathbf{x}, \lambda\rangle \equiv |\xi\rangle \qquad \xi \equiv (\mathbf{x}, \lambda)$$

$$\text{波動関数}\qquad \langle \mathbf{x}, \lambda|\psi\rangle = \langle \xi|\psi\rangle \equiv \psi(\xi)$$

N 粒子 : $\hat{O}_1 = (\hat{\mathbf{x}}_1, \hat{\mathbf{p}}_1, \hat{\mathbf{S}}_1), \cdots, \hat{O}_N = (\hat{\mathbf{x}}_N, \hat{\mathbf{p}}_N, \hat{\mathbf{S}}_N), \quad \hat{H} = \hat{H}(\hat{O}_1,\ \cdots,\ \hat{O}_N)$

$$\text{波動関数}\qquad \langle \mathbf{x}_1, \lambda_1; \cdots; \mathbf{x}_N, \lambda_N|\psi\rangle \equiv \psi(\xi_1,\ \cdots, \xi_N)$$

粒子の入れ替え操作

$|\psi\rangle \longrightarrow \hat{P}_{ij}|\psi\rangle \equiv |P_{ij}\psi\rangle$

$$(P_{ij}\psi)(\xi_1, \cdots, \xi_N) = \psi(\xi_1, \cdots, \overset{\overset{i}{\downarrow}}{\xi_j}, \cdots, \overset{\overset{j}{\downarrow}}{\xi_i}, \cdots, \xi_N)$$

明らかに $(\hat{P}_{ij})^2 = 1$

Hamiltonian $\hat{H}(\hat{O}_1, \cdots, \hat{O}_N)$ は

$$\hat{P}_{ij}\hat{H}(\hat{O}_1, \cdots, \hat{O}_N)|\psi\rangle = \hat{H}(\cdots, \overset{\overset{i}{\downarrow}}{\hat{O}_j}, \cdots, \overset{\overset{j}{\downarrow}}{\hat{O}_i}, \cdots)\hat{P}_{ij}|\psi\rangle$$

識別不可能な同種粒子系では $\hat{H}(\cdots, \hat{O}_j, \cdots, \hat{O}_i, \cdots) = \hat{H}(\cdots, \hat{O}_i, \cdots, \hat{O}_j, \cdots)$

$$\text{すなわち}\quad \hat{P}_{ij}\hat{H} = \hat{H}\hat{P}_{ij}$$

同種粒子の系の状態 $|\psi\rangle$

$|\psi\rangle$ と $\hat{P}_{ij}|\psi\rangle$ は区別できない**同じ状態**のはず

$$\hat{P}_{ij}|\psi\rangle = \eta|\psi\rangle \qquad |\eta| = 1$$

$$(\hat{P}_{ij})^2 = 1 \quad \longrightarrow \quad \eta^2 = 1\ , \quad \eta = \pm 1$$

波動関数では

$$\psi(\cdots\xi_j\cdots\xi_i\cdots) = \eta\psi(\cdots\xi_i\cdots\xi_j\cdots) \qquad \eta = \begin{cases} +1 & \text{完全対称関数} \\ -1 & \text{完全反対称関数} \end{cases}$$

対称性の保存

$$\text{時刻 } t=0 \text{ に} \quad \hat{P}_{ij}|\psi\rangle = \eta|\psi\rangle$$

$$\Downarrow$$

$$\hat{P}_{ij}|\psi(t)\rangle = \hat{P}_{ij}e^{-i\frac{1}{\hbar}\hat{H}t}|\psi\rangle = e^{-i\frac{1}{\hbar}\hat{H}t}\hat{P}_{ij}|\psi\rangle = e^{-i\frac{1}{\hbar}\hat{H}t}\eta|\psi\rangle = \eta|\psi(t)\rangle$$

$$\eta = \pm 1 \quad : \quad \text{粒子の基本的属性（統計性）}$$

$$\begin{cases} \eta = +1 & : \text{ Bose-Einstein 統計} & : \text{ boson ボソン} \\ \eta = -1 & : \text{ Fermi-Dirac 統計} & : \text{ fermion フェルミオン} \end{cases}$$

スピンと統計性

相対論的場の量子論の帰結

$$\begin{cases} \text{整数スピンの粒子} & : \text{ boson} & \eta = +1 \\ \text{反整数スピンの粒子} & : \text{ fermion} & \eta = -1 \end{cases}$$

2.2　粒子間相互作用のない系

$$\hat{H}(\hat{O}_1, \cdots, \hat{O}_N) = \sum_{i=1}^{N} \hat{H}(\hat{O}_i) \qquad \text{例えば} \ \hat{H}(\hat{O}_i) = \frac{1}{2m}\hat{\mathbf{p}}_i^2 + V(\hat{\mathbf{x}}_i)$$

1粒子 Hamiltonian $\hat{H}(\hat{O})$ の固有状態と固有関数を

$$\hat{H}(\hat{O})|n\rangle = E_n|n\rangle \ , \qquad \langle\xi|n\rangle \equiv \phi_n(\xi)$$

とすると N 粒子系では

$$\hat{H}(\hat{O}_1, \cdots, \hat{O}_N)|n_1, n_2, \cdots, n_N\rangle = \sum_{i=1}^{N} \underbrace{\hat{H}(\hat{O}_i)}_{=E_{n_i}} |n_1, \cdots, \overset{\overset{i}{\downarrow}}{n_i}, \cdots, n_N\rangle$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{N} E_{n_i}\right)|n_1, \cdots, n_N\rangle$$

$$\langle\xi_1, \cdots, \xi_N|N_1, \cdots, n_N\rangle = \phi_{n_1}(\xi_1)\phi_{n_2}(\xi_2)\cdots\phi_{n_N}(\xi_N)$$

$$\therefore \quad \psi(\xi_1, \cdots, \xi_N, t) = \sum_{\{n_i\}} C_{n_1\cdots n_N} e^{-i\frac{1}{\hbar}\sum_i E_{n_i}t}\phi_{n_1}(\xi_1)\cdots\phi_{n_N}(\xi_N)$$

条件 $\psi(\cdots\xi_j\cdots\xi_i\cdots)=\eta\psi(\cdots\xi_i\cdots\xi_j\cdots)$ より

$$C_{\cdots n_j\cdots n_i\cdots}=\eta\, C_{\cdots n_i\cdots n_j\cdots} \qquad \eta=\begin{cases}+1 & \text{boson}\\ -1 & \text{fermion}\end{cases}$$

パウリの排他律

$\eta=-1$ の fermion の系で $n_i=n_j=n$ とおくと

$$C_{\cdots n\cdots n\cdots}=-C_{\cdots n\cdots n\cdots}\equiv 0$$

同一量子状態に 2 個以上の粒子は存在し得ない。

第3章　Schrödinger 場の量子論

3.1　Schrödinger 波動関数の第２量子化（bose 粒子系）

ポテンシャル $V(\mathbf{x})$ 中の１粒子の波動関数 (spin $s =$ 整数 ≥ 0)

$$\psi(\mathbf{x},t) = \begin{pmatrix} \psi_s(\mathbf{x},t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \psi_{-s}(\mathbf{x},t) \end{pmatrix}$$

$$\text{Schrödinger 方程式：} \qquad i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\mathbf{x},t) = \mathcal{H}\psi(\mathbf{x},t)$$

$$\text{例えば} \qquad \mathcal{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\mathbf{x}) + \underbrace{[\text{spin 相互作用}]}_{(2s+1)\times(2s+1)\ \text{行列}}$$

第２量子化：ここで $\psi(\mathbf{x},t) \to \hat{\psi}(\mathbf{x},t)$ 量子論的場の演算子とみなすとどのような量子系になるか ？

★ 場の運動方程式　$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\hat{\psi}(\mathbf{x},t) = \mathcal{H}\hat{\psi}(\mathbf{x},t)$　を Heisenberg 描像での $\hat{\psi}(\mathbf{x},t)$ の Heisenberg の運動方程式とみなす。 $\left(\frac{d}{dt}\hat{O}(t) = \frac{i}{\hbar}[\hat{H}(t),\hat{O}(t)] \right)$

★ $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\hat{\psi}(\mathbf{x},t) = -[\hat{H}(t),\hat{\psi}(\mathbf{x},t)] = \mathcal{H}\hat{\psi}(\mathbf{x},t)$ となるような場の系のハミルトニアン $\hat{H}(t) = \hat{H}$ は何か ？

モード展開

$\hat{\psi}(\mathbf{x},t)$ を $\mathcal{H}$ の固有関数系 $\phi_n(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \phi_n(\mathbf{x},s) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \phi_n(\mathbf{x},-s) \end{pmatrix}$ で展開（固有値ϵ_n, $n = 1,\cdots,\infty$）

$$\mathcal{H}\phi_n(\mathbf{x}) = \epsilon_n\phi_n(\mathbf{x}) \qquad \begin{cases} \int d^3\mathbf{x}\phi_n^\dagger(\mathbf{x})\phi_m(\mathbf{x}) \equiv \int d^3\mathbf{x}\sum_{\lambda=-s}^{s}\phi_n^*(\mathbf{x},\lambda)\phi_m(\mathbf{x},\lambda) = \delta_{nm} \\ \\ \sum_n \phi_n(\mathbf{x})\phi_n^\dagger(\mathbf{y}) \equiv \sum_n \phi_n(\mathbf{x},\lambda)\phi_n^*(\mathbf{y},\lambda') = \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})\cdot\mathbf{1}_{(2s+1)\times(2s+1)} \end{cases}$$

$$\hat{\psi}(\mathbf{x},t)=\sum_{n=1}^{\infty}\hat{a}_n(t)\phi_n(\mathbf{x})\qquad\left(\hat{\psi}_\lambda(\mathbf{x},t)=\sum_{n=1}^{\infty}\hat{a}_n(t)\phi_n(\mathbf{x},\lambda)\right)$$

運動方程式に代入。$\phi_n(\mathbf{x})$ の係数を比較すると

$$i\hbar\frac{d}{dt}\hat{a}_n(t)=-[\hat{H}(t),\hat{a}_n(t)]=\epsilon_n\hat{a}_n(t)\qquad\Rightarrow\qquad\hat{a}_n(t)=\hat{a}_n e^{-\frac{i}{\hbar}\epsilon_n t}$$

$$\hat{H}(t)=\hat{H}\quad\text{だから}\qquad\left\{\begin{array}{l}[\hat{H},\hat{a}_n]=-\epsilon_n\hat{a}_n\\ [\hat{H},\hat{a}_n^\dagger]=\epsilon_n\hat{a}_n^\dagger\end{array}\right.$$

生成消滅演算子

今、状態 $|E\rangle$ がハミルトニアン $\hat{H}$ の固有状態とする。

$$\hat{H}|E\rangle=E|E\rangle$$

$$\Rightarrow\quad\left\{\begin{array}{l}\hat{H}\underline{\hat{a}_n^\dagger|E\rangle}=(\underbrace{[\hat{H},\hat{a}_n^\dagger]}_{=\epsilon_n\hat{a}_n^\dagger}+\hat{a}_n^\dagger\underbrace{\hat{H}}_{\Rightarrow E})|E\rangle=(E+\epsilon_n)\underline{\hat{a}_n^\dagger|E\rangle}\\ \\ \hat{H}\underline{\hat{a}_n|E\rangle}=(\underbrace{[\hat{H},\hat{a}_n]}_{=-\epsilon_n\hat{a}_n}+\hat{a}_n\underbrace{\hat{H}}_{\Rightarrow E})|E\rangle=(E-\epsilon_n)\underline{\hat{a}_n|E\rangle}\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{c}\hat{a}_n^\dagger\\ \hat{a}_n\end{array}\right\}\ :\ \text{エネルギーを}\ \epsilon_n\ \text{だけ}\left\{\begin{array}{c}\uparrow\\ \downarrow\end{array}\right\}\ :\ \phi_n(\mathbf{x})\ \text{の状態の粒子の}\left\{\begin{array}{c}\text{生成}\\ \text{消滅}\end{array}\right\}\text{演算子}$$

調和振動子を思い出す（角振動数 ω）

$$\hat{H}=\frac{1}{2}\hat{P}^2+\frac{1}{2}\omega^2\hat{Q}^2\qquad;\ [\hat{Q},\hat{P}]=i\hbar$$

$$\left\{\begin{array}{l}\hat{Q}\equiv\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}}(\hat{a}+\hat{a}^\dagger)\\ \hat{P}\equiv i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}}(-\hat{a}+\hat{a}^\dagger)\end{array}\right.\qquad\Rightarrow\qquad\left\{\begin{array}{l}[\hat{a},\hat{a}^\dagger]=1\\ \hat{H}=\hbar\omega(\hat{a}^\dagger\hat{a}+\frac{1}{2})\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow\quad[\hat{H},\hat{a}]=-\hbar\omega\hat{a},\quad[\hat{H},\hat{a}^\dagger]=\hbar\omega\hat{a}^\dagger\quad:\ \text{昇降演算子}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\text{基底状態：}|0\rangle\ :\ \hat{a}|0\rangle=0,\ \ \hat{H}|0\rangle=\frac{1}{2}\hbar\omega|0\rangle,\ \langle 0|0\rangle=1\\ \\ N\ \text{励起状態：}|N\rangle=\frac{1}{\sqrt{N!}}(\hat{a}^\dagger)^N|0\rangle,\ \ \hat{H}|N\rangle=\left(\frac{1}{2}+N\right)\hbar\omega|N\rangle,\ \langle N|N\rangle=1\end{array}\right.$$

$$\hat{N}\equiv\hat{a}^\dagger\hat{a},\qquad\hat{N}|N\rangle=N|N\rangle\qquad\hat{N}\ :\ \text{励起数演算子}$$

$$\left[\begin{array}{l}\text{すなわち、場 } \hat{\psi}(\mathbf{x},t) \text{ の量子力学は、} \mathcal{H} \text{ の各固有値 } \epsilon_n \ (n=1,\cdots,\infty) \text{ に対応} \\ \text{した角振動数 } \omega_n = \frac{\epsilon_n}{\hbar} \text{ の無限個の調和振動子の集まりとして実現できる。}\end{array}\right]$$

$$\hat{H} = \sum_{n=1}^{\infty} \hbar\omega_n(\hat{a}_n^\dagger \hat{a}_n + \frac{1}{2}) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_n + [\text{定数}]$$

$$\begin{cases} [\hat{a}_n, \hat{a}_m^\dagger] = \delta_{nm} \\ \\ [\hat{a}_n, \hat{a}_m] = 0, \qquad [\hat{a}_n^\dagger, \hat{a}_m^\dagger] = 0 \end{cases}$$

状態空間 (Fock space)

★ 最低エネルギー状態 $|0\rangle$: $\underline{\text{すべての振動子が基底状態}}$

$$\underbrace{}_{} \quad |||$$

真空

$$\hat{a}_n|0\rangle = 0 \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

$$\hat{H}|0\rangle = [\text{定数}]|0\rangle \equiv 0$$

[定数] $\equiv 0$ となるようにエネルギーの原点を定める。

★ １励起状態

$\hat{a}_n^\dagger|0\rangle$ ： n 番目の振動子が 1 個励起された状態

$\hat{H}\hat{a}_n^\dagger|0\rangle = \epsilon_n \hat{a}_n^\dagger|0\rangle$ ： エネルギー ϵ_n

$$\Downarrow$$

$\phi_n(\mathbf{x})$ の １粒子状態

★ 2 励起状態

$\hat{a}_n^\dagger \hat{a}_m^\dagger|0\rangle$ ： n 番目と m 番目の振動子がそれぞれ 1 個ずつ励起された状態

$$\hat{H}\hat{a}_n^\dagger \hat{a}_m^\dagger|0\rangle = (\epsilon_n + \epsilon_m)\hat{a}_n^\dagger \hat{a}_m^\dagger|0\rangle$$

$$\hat{a}_n^\dagger \hat{a}_m^\dagger|0\rangle = \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_n^\dagger|0\rangle$$

$$\Downarrow$$

2 個の励起について対称

$\underline{\text{bose 粒子系}}$を記述 $\sim$ $\phi_n(\mathbf{x}_1)\phi_m(\mathbf{x}_2) + \phi_m(\mathbf{x}_1)\phi_n(\mathbf{x}_2)$

★ 一般の多粒子の状態

$$\left.\begin{array}{l} 1\text{番目の振動子が } N_1\text{個} \\ 2\text{番目の振動子が } N_2\text{個} \\ 3\text{番目の振動子が } N_3\text{個} \\ \cdot \qquad\qquad\qquad\quad \cdot \\ \cdot \qquad\qquad\qquad\quad \cdot \end{array}\right\} \text{励起} \quad (\text{粒子数表示})$$

$$|N_1, N_2, N_3, \cdots\rangle = \frac{(\hat{a}_1^\dagger)^{N_1}}{\sqrt{N_1!}} \frac{(\hat{a}_2^\dagger)^{N_2}}{\sqrt{N_2!}} \frac{(\hat{a}_3^\dagger)^{N_3}}{\sqrt{N_3!}} \cdots |0\rangle \equiv \left[\prod_{n=1}^{\infty} \frac{(\hat{a}_n^\dagger)^{N_n}}{\sqrt{N_n!}}\right] |0\rangle$$

$$\sum_n N_n \text{ 個の bose 粒子系}$$

$$\langle N_1', N_2', \cdots | N_1, N_2, \cdots\rangle = \delta_{N_1 N_1'} \delta_{N_2 N_2'} \cdots$$

粒子数演算子

$$\hat{N}_n \equiv \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_n \qquad : \quad \hat{N}_n |N_1, \cdots, N_n, \cdots\rangle = N_n |N_1, \cdots, N_n, \cdots\rangle$$

$$\hat{N} \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \hat{N}_n \qquad : \quad \hat{N} |N_1, \cdots, N_n, \cdots\rangle = \left(\sum_{n=1}^{\infty} N_n\right) |N_1, \cdots, N_n, \cdots\rangle$$

$$\hat{N} \quad : \quad \text{全粒子数の演算子}$$

$$\hat{H} = \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n \hat{N}_n \quad : \quad \hat{H} |N_1, \cdots\rangle = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n N_n\right) |N_1, \cdots\rangle$$

場 $\hat{\psi}(\mathbf{x}, t)$ による表現

$$\hat{\psi}(\mathbf{x}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{a}_n(t) \phi_n(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{a}_n e^{-\frac{i}{\hbar}\epsilon_n t} \phi_n(\mathbf{x})$$

$$\mathcal{H} \phi_n(\mathbf{x}) = \epsilon_n \phi_n(\mathbf{x}) \quad : \quad \mathcal{H} \equiv -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{x}) + [\text{spin}]$$

Hamiltonian $\hat{H}$ と全粒子数演算子 $\hat{N}$ は

$$\hat{H}(t) = \int d^3\mathbf{x} \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x}, t) \mathcal{H} \hat{\psi}(\mathbf{x}, t) = \hat{H}$$

$$\hat{N}(t) = \int d^3\mathbf{x} \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x}, t) \hat{\psi}(\mathbf{x}, t) = \hat{N}$$

で与えられる。

$$\because \quad \int d^3\mathbf{x} \left(\sum_n \hat{a}_n^\dagger e^{\frac{i}{\hbar}\epsilon_n t} \phi_n^\dagger(\mathbf{x})\right) \mathcal{H} \left(\sum_m \hat{a}_m e^{-\frac{i}{\hbar}\epsilon_m t} \phi_m(\mathbf{x})\right)$$

$$= \sum_{n,m} \epsilon_m \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_m e^{\frac{i}{\hbar}(\epsilon_n - \epsilon_m)t} \int d^3\mathbf{x} \phi_n^\dagger(\mathbf{x}) \phi_m(\mathbf{x}) = \sum_n \epsilon_n \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_n = \hat{H}$$

$\hat{N}$ も同様

場の交換関係

$$\begin{aligned}
[\hat{\psi}(\mathbf{x},t),\hat{\psi}(\mathbf{y},t)^\dagger] &= \sum_{n,m}\phi_n(\mathbf{x})\phi_m(\mathbf{y})e^{\frac{i}{\hbar}(\epsilon_n-\epsilon_m)t}[\hat{a}_n,\hat{a}_m^\dagger] \\
&= \sum_n \phi_n(\mathbf{x})\phi_n^\dagger(\mathbf{y}) = \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})\cdot\mathbf{1}_s \\
[\hat{\psi}(\mathbf{x},t),\hat{\psi}(\mathbf{y},t)] &= 0, \quad [\hat{\psi}(\mathbf{x},t)^\dagger,\hat{\psi}(\mathbf{y},t)^\dagger] \ = \ 0
\end{aligned}$$

★ Heisenberg の運動方程式

$$\begin{aligned}
i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\hat{\psi}(\mathbf{x},t) &= [\hat{\psi}(\mathbf{x},t),\hat{H}(t)] \\
&= \int d^3\mathbf{y}[\hat{\psi}(\mathbf{x},t),\hat{\psi}(\mathbf{y},t)^\dagger\mathcal{H}\hat{\psi}(\mathbf{y},t)] \\
&= \int d^3\mathbf{y}\,\underbrace{[\hat{\psi}(\mathbf{x},t),\hat{\psi}(\mathbf{y},t)^\dagger]}_{=\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})\cdot\mathbf{1}_s}\mathcal{H}\hat{\psi}(\mathbf{y},t)
\end{aligned}$$

$$\therefore\quad i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\hat{\psi}(\mathbf{x},t) = \mathcal{H}\hat{\psi}(\mathbf{x},t) \qquad \text{Schrödinger の波動方程式}$$

Schrödinger 場の boson 系のまとめ

$$\begin{aligned}
\text{Hamiltonian}:\ \hat{H} &= \int d^3\mathbf{x}\hat{\psi}(\mathbf{x},t)^\dagger\mathcal{H}\hat{\psi}(\mathbf{x},t) \quad : \quad \mathcal{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\mathbf{x}) + [\text{spin}] \\
&= \int d^3\mathbf{x}\left[\frac{\hbar^2}{2m}(\nabla\hat{\psi}(\mathbf{x},t))^\dagger\cdot(\nabla\hat{\psi}(\mathbf{x},t)) + \hat{\psi}(\mathbf{x},t)^\dagger(V(\mathbf{x})+[\text{spin}])\hat{\psi}(\mathbf{x},t)\right]
\end{aligned}$$

全粒子数演算子：$\hat{N} = \int d^3\mathbf{x}\hat{\psi}(\mathbf{x},t)^\dagger\hat{\psi}(\mathbf{x},t)$

$\hat{\rho}(\mathbf{x},t) \equiv \hat{\psi}(\mathbf{x},t)^\dagger\hat{\psi}(\mathbf{x},t)$　：粒子数密度

場の交換関係：$[\hat{\psi}(\mathbf{x},t),\hat{\psi}(\mathbf{y},t)^\dagger] = \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})\cdot\mathbf{1}_s$

$[\hat{\psi}(\mathbf{x},t),\hat{\psi}(\mathbf{y},t)] = 0,\ \ [\hat{\psi}(\mathbf{x},t)^\dagger,\hat{\psi}(\mathbf{y},t)^\dagger] = 0$

真空　:　$|0\rangle$　:　$\hat{\psi}(\mathbf{x},t)|0\rangle = 0$

3.2　fermi 粒子系の記述

$$\text{Schrödinger 場 ：}\quad i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\hat{\psi}(\mathbf{x},t)=\mathcal{H}\hat{\psi}(\mathbf{x},t)$$

$$\hat{\psi}(\mathbf{x},t)=\sum_{n=1}^{\infty}\hat{a}_n e^{-\frac{i}{\hbar}\epsilon_n t}\phi_n(\mathbf{x})$$

$$\hat{H}=\sum_n \epsilon_n\hat{a}_n^\dagger\hat{a}_n \quad ;\quad [\hat{H},\hat{a}_n]=-\epsilon_n\hat{a}_n,\quad [\hat{H},\hat{a}_n^\dagger]=\epsilon_n\hat{a}_n^\dagger$$

$$\text{bose 粒子系}\quad\Rightarrow\quad [\hat{a}_n,\hat{a}_m^\dagger]=\delta_{nm},\ [\hat{a}_n,\hat{a}_m]=0,\ [\hat{a}_n^\dagger,\hat{a}_m^\dagger]=0$$

$$\Updownarrow$$

$$\hat{a}_n^\dagger\hat{a}_m^\dagger|0\rangle=\hat{a}_m^\dagger\hat{a}_n^\dagger|0\rangle\qquad \underline{\text{対称状態}}$$

fermi 粒子系 : 粒子の入れ替えに対して反対称

$$\Rightarrow\quad \hat{a}_n^\dagger\hat{a}_m^\dagger=-\hat{a}_m^\dagger\hat{a}_n^\dagger$$

反交換関係 : $\{A,B\}\equiv AB+BA$

$$\{\hat{a}_n,\hat{a}_m^\dagger\}=\delta_{nm}\ ,\qquad \{\hat{a}_n,\hat{a}_m\}=0\ ,\qquad \{\hat{a}_n^\dagger,\hat{a}_m^\dagger\}=0$$

$\hat{H}$ との交換関係

$$\begin{aligned}[\hat{H},\hat{a}_n] &= \sum_m \epsilon_m[\hat{a}_m^\dagger\hat{a}_m,\hat{a}_n] \qquad \text{恒等式：}\ [AB,C]=A\{B,C\}-\{A,C\}B\\ &= \sum_m \epsilon_m(\hat{a}_m^\dagger\underbrace{\{\hat{a}_m,\hat{a}_n\}}_{0}-\underbrace{\{\hat{a}_m^\dagger,\hat{a}_n\}}_{\delta_{mn}}\hat{a}_m)\\ &= -\epsilon_n\hat{a}_n\\ [\hat{H},\hat{a}_n^\dagger] &= \epsilon_n\hat{a}_n^\dagger\end{aligned}$$

$$\left.\begin{array}{ll}\hat{a}_n^\dagger & :\ \text{生成}\\ \hat{a}_n & :\ \text{消滅}\end{array}\right\}\text{演算子}\quad \text{O.K.}$$

状態空間

真空 $|0\rangle$: $\hat{a}_n|0\rangle=0\quad(n=1,2,\cdots)$

$$\hat{a}_n\hat{a}_n=0,\quad \hat{a}_n^\dagger\hat{a}_n^\dagger=0\qquad \left\{\begin{array}{l}\text{1つの1粒子状態 }\phi_n(\mathbf{x})\text{ に2個}\\ \text{以上は入れない（パウリの排他律）}\end{array}\right.$$

$$|N_1, N_2, \cdots\rangle = (\hat{a}_1^\dagger)^{N_1}(\hat{a}_2^\dagger)^{N_2}\cdots|0\rangle \qquad N_n = 0 \ \text{ or } \ 1$$

0 : $|0\rangle$

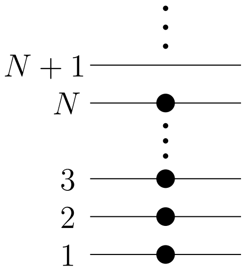
1 : $\hat{a}_n^\dagger|0\rangle \ \sim \ \phi_n(\mathbf{x})$:エネルギー ϵ_n

2 : $\hat{a}_n^\dagger\hat{a}_m^\dagger|0\rangle = -\hat{a}_m^\dagger\hat{a}_n^\dagger|0\rangle \ \sim \ \phi_n(\mathbf{x}_1)\phi_m(\mathbf{x}_2) - \phi_m(\mathbf{x}_1)\phi_n(\mathbf{x}_2)$:エネルギー $\epsilon_n + \epsilon_m$

.　.　.　.

全粒子数が N の最低エネルギー状態

$$\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2^\dagger\cdots\hat{a}_N^\dagger|0\rangle$$



場の反交換関係

$$\{\hat{\psi}(\mathbf{x},t), \hat{\psi}(\mathbf{y},t)^\dagger\} = \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \quad \{\hat{\psi}, \hat{\psi}\} = 0, \quad \{\hat{\psi}^\dagger, \hat{\psi}^\dagger\} = 0 \quad \text{fermi 場}$$

$$\begin{aligned} \text{Hamiltonian} \quad & \hat{H} = \int d^3\mathbf{x}\ \hat{\psi}(\mathbf{x},t)^\dagger\mathcal{H}\hat{\psi}(\mathbf{x},t) \\ \text{粒子数} \quad & \hat{N} = \int d^3\mathbf{x}\ \hat{\psi}(\mathbf{x},t)^\dagger\hat{\psi}(\mathbf{x},t) \\ \text{真空} \quad & \hat{\psi}(\mathbf{x},t)|0\rangle = 0 \end{aligned}$$

3.3　多粒子系の量子力学の記述との対応

$$\hat{\psi}(\mathbf{x}, t=0) \equiv \hat{\psi}(\mathbf{x}) \ : \qquad \text{Schrödinger 描像の演算子}$$

$$\text{１粒子状態の基底 ：} \qquad \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x})|0\rangle \quad \Leftrightarrow \quad |\mathbf{x}\rangle$$

$$\begin{array}{ccc} \langle 0|\hat{\psi}(\mathbf{y})\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x})|0\rangle & \Leftrightarrow & \langle\mathbf{y}|\mathbf{x}\rangle \\ \| & & \| \\ \langle 0|[\pm\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x})\hat{\psi}(\mathbf{y}) + \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})]|0\rangle & = & \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \end{array}$$

⮤ $+$: boson,　$-$: fermion

時刻 $t=0$ の１粒子状態

$$|\Psi\rangle = \int d^3\mathbf{x}\ \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x})|0\rangle\ \underbrace{\psi(\mathbf{x})}_{\text{波動関数}} \qquad ; \quad \psi(\mathbf{x}) = \langle 0|\hat{\psi}(\mathbf{x})|\Psi\rangle$$

時刻 t における状態

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}|\Psi\rangle \equiv \int d^3\mathbf{x}\ \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x})|0\rangle\psi(\mathbf{x},t)$$

波動関数

$$\begin{aligned}\psi(\mathbf{x},t) &= \langle 0|\hat{\psi}(\mathbf{x})|\Psi(t)\rangle = \langle 0|\hat{\psi}(\mathbf{x})e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}|\Psi\rangle \\ &= \langle 0|\underbrace{e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}}_{=1}\underbrace{e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}\hat{\psi}(\mathbf{x})e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}}_{=\hat{\psi}(\mathbf{x},t)}|\Psi\rangle \\ &= \langle 0|\hat{\psi}(\mathbf{x},t)|\Psi\rangle\end{aligned}$$

$\psi(\mathbf{x},t)$ の時間発展

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\mathbf{x},t) = \langle 0|i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\hat{\psi}(\mathbf{x},t)|\Psi\rangle = \langle 0|\mathcal{H}\hat{\psi}(\mathbf{x},t)|\Psi\rangle = \mathcal{H}\langle 0|\hat{\psi}(\mathbf{x},t)|\Psi\rangle$$

$$\therefore\quad i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\mathbf{x},t) = \mathcal{H}\psi(\mathbf{x},t) \qquad \Leftarrow \qquad 1\,\text{粒子の Schrödinger 方程式}$$

N 粒子状態

$$|\Psi_N\rangle = \int d^3\mathbf{x}_1\cdots d^3\mathbf{x}_N\ \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x}_N)\cdots\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x}_1)|0\rangle\psi(\mathbf{x}_1,\cdots,\mathbf{x}_N)$$

$$\text{波動関数}\quad \psi(\mathbf{x}_1,\cdots,\mathbf{x}_N)\begin{cases}\text{boson} & : \text{完全対称} \\ \text{fermion} & : \text{完全反対称}\end{cases}$$

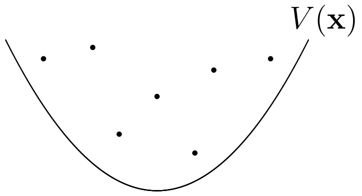
時刻 t の状態

$$|\Psi_N(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}|\Psi_N\rangle \equiv \int d^3\mathbf{x}_1\cdots d^3\mathbf{x}_N\ \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x}_N)\cdots\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x}_1)|0\rangle\psi(\mathbf{x}_1,\cdots,\mathbf{x}_N,t)$$

$$\begin{aligned}\psi(\mathbf{x}_1,\cdots,\mathbf{x}_N,t) &= \frac{1}{N!}\langle 0|\hat{\psi}(\mathbf{x}_1)\cdots\hat{\psi}(\mathbf{x}_N)|\Psi_N(t)\rangle \\ &= \frac{1}{N!}\langle 0|\hat{\psi}(\mathbf{x}_1,t)\cdots\hat{\psi}(\mathbf{x}_N,t)|\Psi_N\rangle \\ i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\mathbf{x}_1,\cdots,\mathbf{x}_N,t) &= \frac{1}{N!}\langle 0|\sum_{i=1}^{N}\hat{\psi}(\mathbf{x}_1,t)\cdots\underbrace{i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\hat{\psi}(\mathbf{x}_i,t)}_{=\mathcal{H}_i\hat{\psi}(\mathbf{x}_i,t)}\cdots\hat{\psi}(\mathbf{x}_N,t)|\Psi_N\rangle \qquad \mathcal{H}_i = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla_i^2 + V(\mathbf{x}_i) \\ &= \sum_{i=1}^{N}\mathcal{H}_i\psi(\mathbf{x}_1,\cdots,\mathbf{x}_N,t)\end{aligned}$$

$$\mathcal{H}^{(N)} \equiv \sum_{i=1}^{N}\mathcal{H}_i \quad \text{の } N \text{ 個の同種粒子系の Schrödinger 方程式}$$

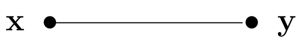
3.4　場の相互作用



$$\hat{H} = \int d^3\mathbf{x}\ \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x},t)\mathcal{H}\hat{\psi}(\mathbf{x},t)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{１粒子 Hamiltonian H の同種粒子の多粒子系} \\ \text{粒子間相互作用なし} \end{array} \right.$$

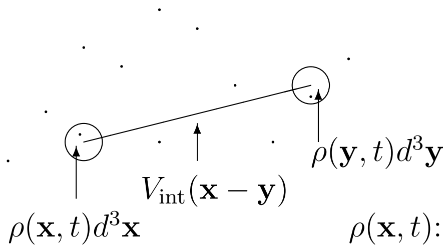
粒子間相互作用は？



$V_{\rm int}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = V_{\rm int}(|\mathbf{x}-\mathbf{y}|)$

２体ポテンシャル

多粒子系



$\rho(\mathbf{x},t)$: 粒子数密度

$$H_{\rm int} \sim \frac{1}{2}\int d^3\mathbf{x}d^3\mathbf{y}\ \rho(\mathbf{x},t)V_{\rm int}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\rho(\mathbf{y},t)$$

$$\rho(\mathbf{x},t) = \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x},t)\hat{\psi}(\mathbf{x},t)$$

$$N \equiv \int d^3\mathbf{x}\ \rho(\mathbf{x},t)\ \ :\ \ \text{全粒子数}$$

$$\hat{H} = \int d^3\mathbf{x}\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x},t)\mathcal{H}\hat{\psi}(\mathbf{x},t) + \frac{1}{2}\int d^3\mathbf{x}d^3\mathbf{y}\ \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x},t)\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{y},t)V_{\rm int}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\hat{\psi}(\mathbf{y},t)\hat{\psi}(\mathbf{x},t)$$

normal ordering

Heisenberg 方程式

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\hat{\psi}(\mathbf{x},t) &= [\hat{\psi}(\mathbf{x},t),\hat{H}] \\ &= \mathcal{H}\hat{\psi}(\mathbf{x},t) + \int d^3\mathbf{y}\ \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{y},t)\hat{\psi}(\mathbf{y},t)V_{\rm int}(\mathbf{y}-\mathbf{x})\hat{\psi}(\mathbf{x},t) \end{aligned}$$

この式は bose 場、fermi 場どちらでも成立！

N 粒子系の波動関数

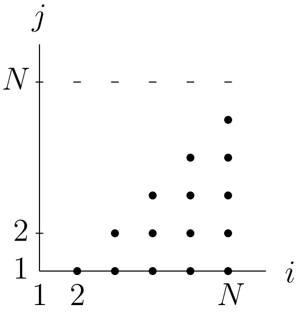
$$\psi(\mathbf{x}_1,\cdots,\mathbf{x}_N,t) = \frac{1}{N!}\langle 0|\hat{\psi}(\mathbf{x}_1,t)\cdots\hat{\psi}(\mathbf{x}_N,t)|\Psi_N\rangle$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\cdots,t)=\frac{1}{N!}\langle 0|\sum_{i=1}^{N}\hat{\psi}(\mathbf{x}_1,t)\cdots\hat{\psi}(\mathbf{x}_{i-1},t)\,\underbrace{i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\hat{\psi}(\mathbf{x}_i,t)}_{\|}\cdots\hat{\psi}(\mathbf{x}_N,t)|\Psi_N\rangle$$

$$\underset{\text{I}}{\mathcal{H}_i\hat{\psi}(\mathbf{x}_i,t)}+\underset{\text{II}}{\int d^3\mathbf{y}\ \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{y},t)\hat{\psi}(\mathbf{y},t)V_{\text{int}}(\mathbf{y}-\mathbf{x}_i)\hat{\psi}(\mathbf{x}_i,t)}$$

$$\text{I}\ \longrightarrow\ \sum_{i=1}^{N}\mathcal{H}_i\psi(\cdots,t)$$

$$\begin{aligned}
\text{II}\ \underset{\langle 0|\hat{\psi}^\dagger=0}{\longrightarrow}\ &\int d^3\mathbf{y}\sum_{i=2}^{N}[\hat{\psi}(\mathbf{x}_1,t)\cdots\hat{\psi}(\mathbf{x}_{i-1},t),\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{y},t)\hat{\psi}(\mathbf{y},t)]V_{\text{int}}(\mathbf{y}-\mathbf{x}_i)\hat{\psi}(\mathbf{x}_i,t)\cdots\hat{\psi}(\mathbf{x}_N,t)\\
&=\int d^3\mathbf{y}\sum_{i=2}^{N}\sum_{j=1}^{i-1}\hat{\psi}(\mathbf{x}_1,t)\cdots\hat{\psi}(\mathbf{x}_{j-1},t)\,\underbrace{[\hat{\psi}(\mathbf{x}_j,t),\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{y},t)\hat{\psi}(\mathbf{y},t)]}_{=\delta^3(\mathbf{x}_j-\mathbf{y})\hat{\psi}(\mathbf{y},t)}\,\hat{\psi}(\mathbf{x}_{j+1},t)\cdots\hat{\psi}(\mathbf{x}_{i-1},t)\\
&\qquad\times V_{\text{int}}(\mathbf{y}-\mathbf{x}_i)\hat{\psi}(\mathbf{x}_i,t)\cdots\hat{\psi}(\mathbf{x}_N,t)\\
&=\sum_{i>j}V_{\text{int}}(\mathbf{x}_j-\mathbf{x}_i)\hat{\psi}(\mathbf{x}_1,t)\cdots\hat{\psi}(\mathbf{x}_N,t)
\end{aligned}$$



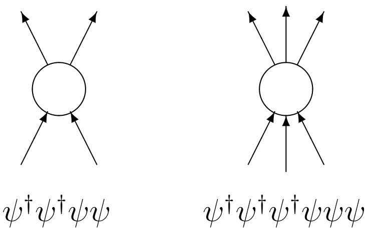
$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\mathbf{x}_1,\cdots,\mathbf{x}_N,t)=(\sum_{i=1}^{N}\mathcal{H}_i+\sum_{i>j}V_{\text{int}}(\mathbf{x}_i-\mathbf{x}_j))\psi(\mathbf{x}_1,\cdots,\mathbf{x}_N,t)$$

$$\mathcal{H}^{(N)}=\sum_{i=1}^{N}\mathcal{H}_i+\sum_{i>j}V_{\text{int}}(\mathbf{x}_i-\mathbf{x}_j)$$

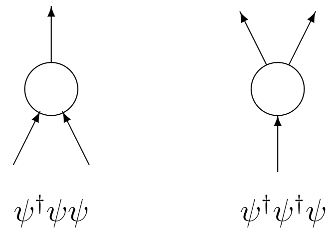
2 体ポテンシャル $V_{\text{int}}(\mathbf{x}-\mathbf{y})$ の存在する N 粒子系のハミルトニアン $\mathcal{H}^{(N)}$ の

Schrödinger 方程式 !!

一般に $\hat{H}$ の場の 3 次以上の項：相互作用項



粒子数保存



粒子数非保存

第4章　相対論的波動方程式

4.1　Schrödinger 波動方程式の相対論的拡張

相対論

$$\left\{\begin{array}{ll} \text{空間座標} & \mathbf{x}=(x,y,z) \\ \text{時刻} & t \end{array}\right\} \Rightarrow \ \text{4元座標}\ \ x^\mu = \left\{\begin{array}{ll} x^0 = ct & c:\text{光速} \\ x^1 = x & \\ x^2 = y & \\ x^3 = z & \end{array}\right.$$

Lorentz 変換

$x^\mu \to x'^\mu$ の１次変換

$$dx'^\mu = \sum_{\nu=0}^{3} a^\mu{}_\nu dx^\nu \quad , \qquad dx^\mu = \sum_\nu a_\nu{}^\mu dx'^\nu \qquad (\text{逆変換})$$

$$\sum_\rho a^\mu{}_\rho a_\nu{}^\rho = \delta^\mu_\nu = \sum_\rho a_\rho{}^\mu a^\rho{}_\nu \qquad \delta^\mu_\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

で

$$a_\mu{}^\nu = \sum_{\rho,\sigma} g_{\mu\rho} g^{\nu\sigma} a^\rho{}_\sigma \qquad\qquad g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

を満たす変換。

Lorentz vector：

$$A^\mu = (A^0, A^1, A^2, A^3) \quad \left\{\begin{array}{l} A^\mu \to A'^\mu = a^\mu{}_\nu A^\nu \\ A_\mu \to A'_\mu = a_\mu{}^\nu A_\nu \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} A_\mu \equiv g_{\mu\nu} A^\nu \\ A^\mu = g^{\mu\nu} A_\nu \end{array}\right.$$

Scalar 積：

$$A^\mu B_\mu = A_\mu B^\mu = g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu = g^{\mu\nu} A_\mu B_\nu = A^0 B^0 - A^1 B^1 - A^2 B^2 - A^3 B^3$$

$$A^\mu B_\mu \to A'^\mu B'_\mu = A^\mu B_\mu \qquad : \ \text{Lorentz scalar}$$

微分演算：

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} \qquad \partial'_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \sum_\nu \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\nu} = a_\mu{}^\nu \partial_\nu$$

$$\Box \equiv g^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu = \frac{\partial^2}{c^2\partial t^2} - \nabla^2 \quad : \text{ d'Alembertian (Lorentz 不変)}$$

自由粒子の波動方程式

非相対論

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\mathbf{x},t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\mathbf{x},t) \qquad \Leftarrow \qquad E = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \text{ で } \begin{cases} E \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \\ \mathbf{p} \to -i\hbar\nabla \end{cases}$$

相対論

$$\begin{cases} \text{４元運動量：}\ p^\mu = (\ \frac{E}{c},\ \mathbf{p}\ ) \\ \\ \text{Einstein の関係式：}\ p^\mu p_\mu \equiv \frac{E^2}{c^2} - \mathbf{p}^2 = m^2c^2 \end{cases}$$

$$p_\mu = (\ \frac{E}{c},\ -\mathbf{p}\ ) \to i\hbar(\ \frac{\partial}{c\partial t},\ \nabla\ ) = i\hbar\frac{\partial}{\partial x^\mu} \equiv i\hbar\partial_\mu$$

$$p^\mu p_\mu = g^{\mu\nu}p_\mu p_\nu \to -\hbar^2 g^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu = -\hbar^2\Box \qquad \Box = \frac{\partial^2}{c^2\partial t^2} - \nabla^2$$

$$\therefore \quad (\ \Box + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\ )\psi(\mathbf{x},t) = 0 \qquad \text{Klein-Gordon 方程式}$$

質量 m の自由粒子の場 $\psi(x)$ は必ず K-G 方程式を満たすべき。

★ K-G 方程式は $\underline{\partial_\mu \text{ について２次}}$

$\underline{\partial_\mu \text{ の１次}}$ の方程式は可能か？ ⇒ Dirac 方程式

4.2 Klein-Gordon 方程式

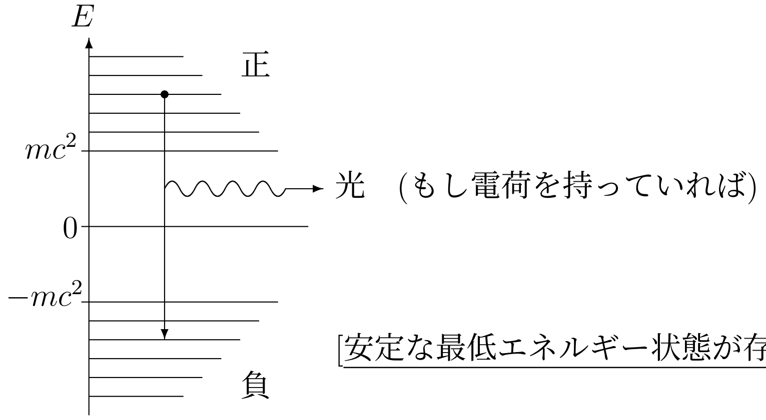
$$\left(\Box + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\psi(\mathbf{x},t) = 0$$

量子力学的１粒子波動関数としての困難

- 負のエネルギー解の存在

$$\text{平面波解：}\ \psi(\mathbf{x},t) = e^{-\frac{i}{\hbar}(Et - \mathbf{p}\cdot\mathbf{x})} \qquad \begin{cases} i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = E\psi & : \text{ エネルギー } E \\ -i\hbar\nabla\psi = \mathbf{p}\psi & : \text{ 運動量 } \mathbf{p} \end{cases}$$

$$\text{K-G 方程式}\ \Rightarrow\ -\frac{E^2}{c^2}+\mathbf{p}^2+m^2c^2=0\quad\Rightarrow\quad E=\pm\sqrt{m^2c^4+c^2\mathbf{p}^2}$$



[安定な最低エネルギー状態が存在しない]

- 確率解釈の問題

量子力学

$$\left.\begin{array}{ll}\text{確率密度} & \rho\geq 0\\ \text{確率の流れの密度} & \mathbf{j}\end{array}\right\}\ \frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathrm{div}\ \mathbf{j}=0$$

$$\Downarrow$$

$$\text{全確率の保存}\ :\quad \frac{d}{dt}\int d^3\mathbf{x}\rho=-\int d^3\mathbf{x}\ \mathrm{div}\ \mathbf{j}=-\int_\infty d\mathbf{S}\cdot\mathbf{j}\underset{\substack{\uparrow\\ \mathbf{j}(|\mathbf{x}|\to\infty)\to 0}}{=}0$$

Lorentz 不変性

$$j^\mu=(c\rho,\mathbf{j})\ \ ;\qquad \partial_\mu j^\mu\equiv\frac{\partial}{\partial x^\mu}j^\mu=0$$

このような j^μ は

$$j^\mu\equiv i\frac{\hbar}{2m}\left(\psi^*\partial^\mu\psi-(\partial^\mu\psi)^*\psi\right)\quad\Rightarrow\quad \partial_\mu j^\mu\underset{\uparrow\ \text{K-G eq.}}{=}0$$

しかし

$$\rho=\frac{1}{c}j^0=i\frac{\hbar}{2mc^2}\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t}-\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\psi\right)\gtreqless 0\qquad\text{負にもなる！}$$

★ 正エネルギー解の非相対論的極限においてのみ

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}\simeq mc^2\psi\quad\Rightarrow\quad\rho\simeq\psi^*\psi$$

4.3　Dirac 方程式

Dirac の動機：何としても、相対論的量子力学を作りたい。

$$\psi \;\to\; \psi \equiv \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \psi_N \end{pmatrix}, \qquad \rho = \psi^\dagger \psi \equiv \sum_{i=1}^{N} \psi_i^* \psi_i \geq 0$$

★ $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = \mathcal{H}\psi$ ： $\mathcal{H}$（ $N \times N$ マトリックス）がエルミートなら確率保存

$$\because \quad i\hbar\frac{\partial}{\partial t}(\psi^\dagger\psi) = i\hbar\left(\psi^\dagger\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{\partial\psi^\dagger}{\partial t}\psi\right) = \psi^\dagger\mathcal{H}\psi - (\mathcal{H}\psi)^\dagger\psi$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\int d^3\mathbf{x}\;\psi^\dagger\psi = \int d^3\mathbf{x}\;\left(\psi^\dagger\mathcal{H}\psi - (\mathcal{H}\psi)^\dagger\psi\right) = 0$$

★ Lorentz 不変性 ⇒ $\mathcal{H}$ は空間 1 次微分 ∇ を含むべき

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = \mathcal{H}\psi \qquad : \quad \mathcal{H} = c\sum_{i=1}^{3}\alpha^i(-i\hbar\nabla^i) + mc^2\beta \qquad \text{Dirac 方程式}$$

$$\alpha^i\ (i=1,2,3),\ \beta \text{ は } N\times N \text{ エルミート行列：} {\alpha^i}^\dagger = \alpha^i,\ \ \beta^\dagger = \beta$$

問題：このとき $j^i \equiv c\psi^\dagger\alpha^i\psi$ とおくと $\frac{\partial}{\partial t}\rho + \mathrm{div}\,\mathbf{j} = 0$ を示せ。

★ さらに、この方程式の解が自動的に K-G 方程式を満たすことを要請

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi\right) &= i\hbar\frac{\partial}{\partial t}(\mathcal{H}\psi) = \mathcal{H}\mathcal{H}\psi \\ &= \left(c\alpha^i\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x^i}\right) + mc^2\beta\right)\left(c\alpha^j\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x^j}\right) + mc^2\beta\right)\psi \\ &= \left(-c^2\hbar^2\underbrace{\alpha^i\alpha^j\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j}}_{=\frac{1}{2}(\alpha^i\alpha^j+\alpha^j\alpha^i)\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j}} + mc^3(\alpha^i\beta + \beta\alpha^i)(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x^i}) + m^2c^4\beta^2\right)\psi \end{aligned}$$

したがって

$$\left.\begin{array}{c} \alpha^i\alpha^j + \alpha^j\alpha^i = 2\delta^{ij} \\ \alpha^i\beta + \beta\alpha^i = 0 \\ \beta^2 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\psi = 0 \quad \text{K-G eq.}$$

これらの条件を満たす最小のエルミート行列 α^i $(i=1,2,3)$, β は 4 行 4 列の行列

$$\text{Dirac 表示 ：} \quad \alpha^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \beta = \begin{pmatrix} \sigma^0 & 0 \\ 0 & -\sigma^0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{Pauli 行列} \\ \\ \sigma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

★ さらに $\gamma^0 \equiv \beta$, $\gamma^i \equiv \beta\alpha^i$ と定義すると、Dirac 方程式は

$$\left(i\hbar\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - mc \right) \psi = 0 \qquad \text{Dirac eq.}$$

★ Dirac matrix : γ^μ

α^i と β の性質から

$$(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0 \ , \quad (\gamma^i)^\dagger = -\gamma^i$$

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \ , \qquad (\gamma^0)^2 = 1 \ , \ \ (\gamma^i)^2 = -1$$

$$\underline{\text{Dirac 表示}} \qquad \gamma^0 = \begin{pmatrix} \sigma^0 & 0 \\ 0 & -\sigma^0 \end{pmatrix}, \qquad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}$$

★ $\{\gamma^\mu\}$, $\{\tilde{\gamma}^\mu\}$ が共に上の条件を満たすときは

$$\tilde{\gamma}^\mu = U\gamma^\mu U^\dagger$$

のユニタリー変換が存在する。

4.4　Dirac 方程式の相対論的共変性

Lorentz 変換 $\{x^\mu\} \to \ \{x'^\mu\} \ : \ dx'^\mu = a^\mu{}_\nu dx^\nu$ のもとで

$$\text{vector 場は} \quad A^\mu(x) \ \to \ A'^\mu(x') = a^\mu{}_\nu A^\nu(x)$$

$\psi(x)$ も何らかの変換

$$\psi(x) \ \to \ \psi'(x') = \underset{4\times 4\ \text{行列}}{\underline{\underline{S}}}\psi(x) \qquad S \text{ は？}$$

相対性原理

$$\left(i\hbar\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - mc \right) \psi(x) = 0 \ \longrightarrow \ \left(i\hbar\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x'^\mu} - mc \right) \psi'(x') = 0$$

$dx^{\nu} = a_{\mu}{}^{\nu} dx'^{\mu}$ より $\frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} = a_{\mu}{}^{\nu} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}$ だから右式は

$$0 = \left(i\hbar \gamma^{\mu} a_{\mu}{}^{\nu} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} - mc \right) S\psi(x) = S \left(i\hbar S^{-1} \gamma^{\mu} S a_{\mu}{}^{\nu} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} - mc \right) \psi(x)$$

これが成り立つためには

$$S^{-1}\gamma^{\mu} S a_{\mu}{}^{\nu} = \gamma^{\nu} \quad \text{即ち} \quad \gamma^{\mu} a_{\mu}{}^{\nu} = S\gamma^{\nu} S^{-1}$$

微小変換

$$a^{\mu}{}_{\nu} \simeq \delta^{\mu}{}_{\nu} + \epsilon^{\mu}{}_{\nu} \qquad \text{逆変換は } a_{\mu}{}^{\nu} \simeq \delta_{\mu}{}^{\nu} - \epsilon^{\nu}{}_{\mu}$$

L-T の条件　$a_{\mu}{}^{\nu} = g_{\mu\rho} g^{\nu\sigma} a^{\rho}{}_{\sigma} \Rightarrow \epsilon_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\rho} \epsilon^{\rho}{}_{\nu} = -\epsilon_{\nu\mu}$: 反対称

$$\epsilon_{\mu\nu} : \ \text{6 個の微小変換の自由度} \begin{cases} \text{3 個の空間回転} & : \ \epsilon_{ij} \\ \text{3 個の boost} & : \ \epsilon_{0i} \end{cases}$$

$\sigma^{\alpha\beta} = -\sigma^{\beta\alpha}$ なる 4×4 行列により

$$S \simeq 1 - \frac{i}{4} \sigma^{\alpha\beta} \epsilon_{\alpha\beta} \ , \quad S^{-1} \simeq 1 + \frac{i}{4} \sigma^{\alpha\beta} \epsilon_{\alpha\beta}$$

とおくと

$$\begin{aligned} \gamma^{\mu} a_{\mu}{}^{\nu} = S\gamma^{\nu} S^{-1} \ \rightarrow \ \gamma^{\mu} \epsilon^{\nu}{}_{\mu} &= \frac{i}{4} [\sigma^{\alpha\beta}, \gamma^{\nu}] \epsilon_{\alpha\beta} \\ &\| \\ \gamma^{\beta} \epsilon^{\nu}{}_{\beta} &= \gamma^{\beta} g^{\nu\alpha} \epsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\gamma^{\beta} g^{\nu\alpha} - \gamma^{\alpha} g^{\nu\beta}) \epsilon_{\alpha\beta} \end{aligned}$$

$$\therefore \quad [\sigma^{\alpha\beta}, \gamma^{\nu}] = 2i(\gamma^{\alpha} g^{\nu\beta} - \gamma^{\beta} g^{\nu\alpha})$$

これを満たす $\sigma^{\alpha\beta}$ は一意的に

$$\sigma^{\alpha\beta} = \frac{i}{2} [\gamma^{\alpha}, \gamma^{\beta}] = \frac{i}{2} (\gamma^{\alpha}\gamma^{\beta} - \gamma^{\beta}\gamma^{\alpha})$$

$\because \quad \alpha \neq \beta$ とすると　$\sigma^{\alpha\beta} = i\gamma^{\alpha}\gamma^{\beta}$ で

$$[i\gamma^{\alpha}\gamma^{\beta}, \gamma^{\nu}] = i\gamma^{\alpha}\{\gamma^{\beta}, \gamma^{\nu}\} - i\{\gamma^{\alpha}, \gamma^{\nu}\}\gamma^{\beta} = 2i(\gamma^{\alpha} g^{\beta\nu} - g^{\alpha\nu}\gamma^{\beta})$$

★ 有限変換は微小変換を何回も積み重ねることによって実現できる（演習問題 IV-4-1）。

第5章　Dirac の電子論

5.1　電子のスピン

電子の相対論的波動方程式 ≡ Dirac 方程式

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = \mathcal{H}\psi \qquad \mathcal{H} = c\alpha^i p^i + mc^2\beta \qquad p^i \equiv -i\hbar\frac{\partial}{\partial x^i} \quad (i=1,2,3)$$

電子の軌道角運動量　$\mathbf{L} = \mathbf{x}\times\mathbf{p}$

$$L^i = x^j p^k - x^k p^j \qquad (i,j,k) = (1,2,3)\ \text{の cyclic :} \begin{cases}(1,2,3)\\(2,3,1)\\(3,1,2)\end{cases}$$

$$\left[\ \text{非相対論}\ \ \mathcal{H} = \tfrac{\mathbf{p}^2}{2m} \quad \Rightarrow \quad [\mathcal{H}, L^i] = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{角運動量の保存}\ \right]$$

$$\begin{aligned}[\mathcal{H}, L^i] &= [c\alpha^l p^l, x^j p^k - x^k p^j]\\ &= c\alpha^l \underbrace{[p^l, x^j]}_{-i\hbar\delta^{lj}} p^k - c\alpha^l \underbrace{[p^l, x^k]}_{-i\hbar\delta^{lk}} p^j\\ &= -i\hbar c(\alpha^j p^k - \alpha^k p^j) \neq 0 \qquad \text{軌道角運動量非保存}\end{aligned}$$

しかし、$\sigma^{jk} = \frac{i}{2}(\gamma^j\gamma^k - \gamma^k\gamma^j)$ との交換関係は

$$\begin{aligned}[\mathcal{H}, \sigma^{jk}] &= [c\underbrace{\gamma^0\gamma^l}_{\alpha^l}, \sigma^{jk}]p^l = c\gamma^0[\gamma^l, \sigma^{jk}]p^l\\ &= c\gamma^0(-2i)(\gamma^j g^{lk} - \gamma^k g^{lj})p^l \qquad g^{lj} = -\delta^{lj}\\ &= 2ic(\alpha^j p^k - \alpha^k p^j)\end{aligned}$$

よって、$S^i \equiv \frac{\hbar}{2}\sigma^{jk} = \frac{i\hbar}{2}\gamma^j\gamma^k \quad (i,j,k) = (1,2,3)$ の cyclic とすると

$$[\mathcal{H},\ L^i + S^i] = 0$$

$$J^i \equiv L^i + S^i\ , \qquad [\mathcal{H}, J^i] = 0$$

$$[S^1, S^2] = \left(\frac{i\hbar}{2}\right)^2 \underbrace{[\gamma^2\gamma^3, \gamma^3\gamma^1]}_{=2\gamma^1\gamma^2} = i\hbar S^3 \ , \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

したがって

$$[S^i, S^j] = i\hbar S^k \ , \quad [L^i, L^j] = i\hbar L^k \ , \quad [J^i, J^j] = i\hbar J^k \qquad (i, j, k) = (1, 2, 3) \text{ cyclic}$$

$$\begin{cases} \mathbf{J} = (J^1, J^2, J^3) \equiv (J_x, J_y, J_z) & \text{全角運動量} \\ \mathbf{S} = (S^1, S^2, S^3) \equiv (S_x, S_y, S_z) & \text{スピン角運動量} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (S_z)^2 = \left(\frac{i\hbar}{2}\right)^2 (\gamma^1\gamma^2)^2 = \frac{\hbar^2}{4} & S_z\text{の固有値} = \pm\frac{\hbar}{2} \\ (\mathbf{S})^2 = \frac{3}{4}\hbar^2 \equiv s(s+1)\hbar^2 & s = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Dirac 方程式はスピンが $s = \frac{1}{2}$ の粒子の波動方程式

5.2　Dirac 方程式の平面波解

エネルギー E、運動量 $\mathbf{k}$ の固有状態の解

$$\psi = e^{-\frac{i}{\hbar}(Et - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}u \quad ; \qquad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}$$

D-eq.　⇒　$Eu = (c\alpha^i k^i + mc^2\beta)u$　　固有値方程式（解は４個）

$$\alpha^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} \sigma^0 & 0 \\ 0 & -\sigma^0 \end{pmatrix} \ \text{の表示で} \quad u \equiv \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{とおくと}$$

$$E\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mc^2 & c\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{k} \\ c\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{k} & -mc^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$Ea = mc^2 a + c\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{k}b$$

$$Eb = c\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{k} - mc^2 b \quad \longrightarrow \quad b = \frac{c\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{k}}{E + mc^2}a \qquad \text{これを上式に代入}$$

$$Ea = \left(mc^2 + \frac{c^2k^2}{E + mc^2}\right)a \qquad \because \ \ \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{k}\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{k} = k^2$$

$$\Downarrow$$

$$E^2 = m^2c^4 + c^2k^2$$

$$\therefore \quad E = \pm E_k \qquad E_k \equiv \sqrt{m^2c^4 + c^2k^2} \ > \ 0$$

正エネルギー解 : $E = +E_k$

$$u_+^{(i)} = N \begin{pmatrix} \omega^{(i)} \\ \frac{c\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{k}}{E_k + mc^2}\omega^{(i)} \end{pmatrix} \qquad i = 1, 2$$

負エネルギー解 : $E = -E_k$

$$u_-^{(i)} = N \begin{pmatrix} \frac{-c\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{k}}{E_k + mc^2}\omega^{(i)} \\ \omega^{(i)} \end{pmatrix} \qquad i = 1, 2$$

$$\omega^{(i)} \ : \ \omega^{(i)\dagger}\omega^{(j)} = \delta^{ij} \quad \text{例えば} \begin{cases} \omega^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \uparrow \ \text{spin-up} \\ \omega^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \downarrow \ \text{spin-down} \end{cases}$$

規格化

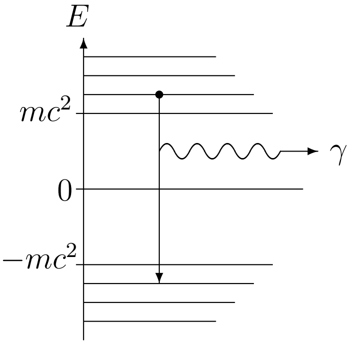
$$u^\dagger u = 1 \quad \rightarrow \quad N = \sqrt{\frac{E_k + mc^2}{2E_k}}$$

$$u_\pm^{(i)\dagger} u_\pm^{(j)} = \delta^{ij} \ , \qquad u_\pm^{(i)\dagger} u_\mp^{(j)} = 0$$

★ スピン角運動量はこの表示で

$$S^i \equiv \frac{\hbar}{2}\sigma^{jk} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{pmatrix}$$

5.3　ホール理論と陽電子



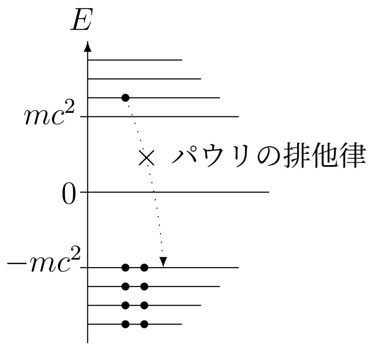
負エネルギー解の困難

Dirac は考えた

「真空」

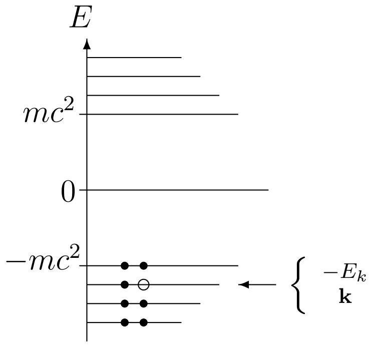
$\|$

「負エネルギーレベルがすべて電子で満たされた状態」



★ 「１電子状態」＝「真空」＋「1個の正エネルギー電子」

★ 負エネルギーレベルのホール（穴）は？



真空を基準にすると、この状態の

エネルギーと運動量は

$$\left.\begin{aligned}&[\text{真空}] - (-E_k) = E_k \\ &[\text{真空}] - (\mathbf{k}) = -\mathbf{k}\end{aligned}\right\} \qquad \text{アインシュタインの関係式} \quad E_k^2 = m^2c^4 + c^2k^2$$

電荷は

$$[\text{真空}] - (-|e|) = +|e|$$

すなわち、電子と同じ質量を持ち、電荷が逆（正）の「粒子」が存在するはず (1929)

⇒ 陽電子　　1932 年 C.D.Anderson が発見（ウィルソンの霧箱）

ホール理論

★ 結局は、多粒子系の取り扱いをせねばならない → 場の量子論

5.4 電磁場中の Dirac 方程式

$$\text{自由電子：}\ (i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc)\psi = 0 \qquad\qquad \partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

電磁場中では ？

古典電気力学のおさらい

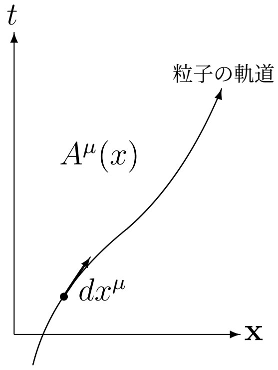
電場 **E**、磁場 **B**

- Maxwell 理論：４元ベクトルポテンシャル $A^\mu = (A^0, A^1, A^2, A^3)$

$$\begin{aligned} E^i &= -\frac{1}{c}\frac{\partial A^i}{\partial t} - \frac{\partial A^0}{\partial x^i} \\ B^i &= \frac{\partial A^k}{\partial x^j} - \frac{\partial A^j}{\partial x^k} \qquad\qquad (i,j,k) = (1,2,3)\ \text{cyclic} \\ &\equiv (\nabla \times \mathbf{A})^i \end{aligned}$$

- 荷電粒子と電磁場との相対論的に不変な相互作用

Lorentz 不変な作用積分



$$\begin{aligned} S_{\rm int} &= -\frac{e}{c}\int dx^\mu A_\mu(x) = -\frac{e}{c}\int A_\mu \frac{dx^\mu}{dt}dt \\ &= -\frac{e}{c}\int (cA^0 - A^i\dot{x}^i)dt \\ &\equiv \int L_{\rm int}dt \\ L_{\rm int} &= -eA^0 + \frac{e}{c}A^i\dot{x}^i \end{aligned}$$

- 電磁相互作用が無いときの Lagrangian を $L_0(\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}})$

$$\begin{aligned} p_0^i &\equiv \frac{\partial L_0}{\partial \dot{x}^i} && \text{正準運動量} \\ H_0 &= p_0^i\dot{x}^i - L_0 && \text{正準ハミルトニアン} \quad H_0(\mathbf{p}_0,\mathbf{x}) \end{aligned}$$

- 次に $L = L_0 + L_{\rm int}$

$$\begin{aligned} p^i &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = \frac{\partial L_0}{\partial \dot{x}^i} + \frac{\partial L_{\rm int}}{\partial \dot{x}^i} = p_0^i + \frac{e}{c}A^i \\ H &= p^i\dot{x}^i - L = p_0^i\dot{x}^i + \frac{e}{c}A^i\dot{x}^i - L_0 + eA^0 - \frac{e}{c}A^i\dot{x}^i \\ &= H_0 + eA^0 \end{aligned}$$

よって

$$H - eA^0 = H_0(p_0,x) = H_0\left(p^i - \frac{e}{c}A^i, x\right)$$

即ち、電磁相互作用なしでエネルギーと運動量の間に

$$E = H_0(p,x)$$

の関係が存在するとき

$$E \ \Rightarrow\ E - eA^0\ , \quad p^i \ \Rightarrow\ p^i - \frac{e}{c}A^i \qquad : \ p^\mu \ \Rightarrow\ p^\mu - \frac{e}{c}A^\mu$$

の置き換え

$$E - eA^0 = H_0\left(p^i - \frac{e}{c}A^i, x\right)$$

で、電磁相互作用下の関係式

$$E = H_0\left(p^i - \frac{e}{c}A^i, x\right) + eA^0 \equiv H(p,x)$$

が得られる。

例: 非相対論的自由粒子

$$E = \frac{1}{2m}\mathbf{p}^2 \quad \Rightarrow \quad E = eA^0(x) + \frac{1}{2m}\left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 \equiv H(p,x)$$

正準運動方程式

$$\begin{aligned} \dot{x}^i &= \frac{\partial H}{\partial p^i} = \frac{1}{m}\left(p^i - \frac{e}{c}A^i\right) \\ \dot{p}^i &= -\frac{\partial H}{\partial x^i} = -e\frac{\partial A^0}{\partial x^i} + \frac{1}{m}\frac{e}{c}\left(p^j - \frac{e}{c}A^j\right)\frac{\partial A^j}{\partial x^i} = -e\frac{\partial A^0}{\partial x^i} + \frac{e}{c}\dot{x}^j\frac{\partial A^j}{\partial x^i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \quad \ddot{x}^i &= \frac{1}{m}\left(\dot{p}^i - \frac{e}{c}\frac{\partial A^i}{\partial t} - \frac{e}{c}\frac{\partial A^i}{\partial x^j}\dot{x}^j\right) \qquad A^i(x(t),t) \text{ に注意} \\ &= \frac{1}{m}\left(-e\frac{\partial A^0}{\partial x^i} + \frac{e}{c}\dot{x}^j\frac{\partial A^j}{\partial x^i} - \frac{e}{c}\frac{\partial A^i}{\partial t} - \frac{e}{c}\frac{\partial A^i}{\partial x^j}\dot{x}^j\right) \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} m\ddot{x}^i &= e\left(-\frac{\partial A^0}{\partial x^i} - \frac{1}{c}\frac{\partial A^i}{\partial t}\right) + \frac{e}{c}\dot{x}^j\left(\frac{\partial A^j}{\partial x^i} - \frac{\partial A^i}{\partial x^j}\right) \\ m\ddot{\mathbf{x}} &= e\mathbf{E} + \frac{e}{c}\dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{B} \qquad \text{ローレンツ力} \end{aligned}$$

相対論的運動は問題 (V-4-1) を参照。

量子論：　$p_\mu \ \rightarrow \ i\hbar\partial_\mu$ だから

$$i\hbar\partial_\mu \ \Rightarrow \ i\hbar\partial_\mu - \frac{e}{c}A_\mu \qquad \text{あるいは} \qquad \partial_\mu \ \Rightarrow \ \partial_\mu + i\frac{e}{c\hbar}A_\mu$$

この置き換えによって得られる電磁場との相互作用は ミニマル相互作用 と呼ばれる。

電磁場中の Dirac 方程式

$$\left(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - \frac{e}{c}\gamma^\mu A_\mu - mc\right)\psi = 0$$

あるいは $A^\mu \equiv (\Phi, \mathbf{A})$ とおいて

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left(c\boldsymbol{\alpha}\cdot\left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right) + \beta mc^2 + e\Phi\right)\psi \qquad \mathbf{p} \equiv -i\hbar\nabla$$

5.5　非相対論的極限と電子の磁気モーメント

電磁場 $A^\mu = (A^0 \equiv \Phi, \mathbf{A})$ 中の電子の Dirac 方程式（ミニマル相互作用）

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \mathcal{H}\psi \ \ ; \ \ \mathcal{H} \equiv c\boldsymbol{\alpha}\cdot\left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right) + \beta mc^2 + e\Phi \ , \qquad \mathbf{p} \equiv -i\hbar\nabla$$

これには$\underline{\text{正エネルギー解}}$と$\underline{\text{負エネルギー解}}$

↑ ホール理論 ⇔ 陽電子

→ 相対論的効果を取り込んだ電子の運動

例えば水素原子だと $\mathbf{A}=0,\ e\Phi=-\frac{e^2}{4\pi r}$ ⇒ エネルギーレベルの微細構造を再現

非相対論的極限

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=\mathcal{H}\psi \underset{\text{N.R.}}{\longrightarrow} i\hbar\frac{\partial\psi_{\text{NR}}}{\partial t}=\mathcal{H}_{\text{NR}}\psi_{\text{NR}}$$

$\mathcal{H}$: 4×4　　$\mathcal{H}_{\text{NR}}$: 2×2

ψ : 4 成分　　ψ_{NR} : 2 成分

$\mathcal{H}_{\text{NR}}$ はどのようなものか？

★ Dirac 表示 $\alpha^i=\begin{pmatrix}0 & \sigma^i\\ \sigma^i & 0\end{pmatrix},\ \beta=\begin{pmatrix}\sigma^0 & 0\\ 0 & -\sigma^0\end{pmatrix}$ で

$$\psi\equiv e^{-\frac{i}{\hbar}mc^2t}\begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix}$$: 静止エネルギー mc^2 による ψ の t 依存性を出しておく。

- Dirac eq. : $\mathbf{p}-\frac{e}{c}\mathbf{A}\equiv\boldsymbol{\pi}$ と書くと

$$\left(mc^2+i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right)\varphi=c\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\pi}\chi+(mc^2+e\Phi)\varphi$$
$$\left(mc^2+i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right)\chi=c\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\pi}\varphi+(-mc^2+e\Phi)\chi$$

- 第 2 式を χ について「解く」と

$$\chi=\left(2mc^2+i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-e\Phi\right)^{-1}c\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\pi}\varphi$$

- 第 1 式に代入して

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-e\Phi\right)\varphi=\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\pi}c^2\left(2mc^2+i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-e\Phi\right)^{-1}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\pi}\varphi$$

★ 非相対論的極限では

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\sim e\Phi\sim\frac{\mathbf{p}^2}{2m}\sim[\text{非相対論的エネルギー}]\sim O(E_{\text{NR}})\ll mc^2$$

$$\begin{aligned}c^2\left(2mc^2+i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-e\Phi\right)^{-1} &= \frac{1}{2m}\left(1+\frac{i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-e\Phi}{2mc^2}\right)^{-1}\\ &= \frac{1}{2m}\left(1-\frac{i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-e\Phi}{2mc^2}+O\left(\left(\frac{E_{\text{NR}}}{mc^2}\right)^2\right)\right)\end{aligned}$$

第１近似

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-e\Phi\right)\varphi\simeq\frac{1}{2m}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\pi}\varphi \qquad \simeq:\ O\left(\frac{E_{\mathrm{NR}}}{mc^2}\right)\text{ を無視する近似}$$

$$\begin{cases}\psi_{\mathrm{NR}}\simeq\varphi\\[2ex] \mathcal{H}_{\mathrm{NR}}\simeq\frac{1}{2m}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\pi}+e\Phi\end{cases}$$

- 公式 $\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{a}\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+i\boldsymbol{\sigma}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$ をもちいると

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\left(\mathbf{p}-\frac{e}{c}\mathbf{A}\right)\boldsymbol{\sigma}\cdot\left(\mathbf{p}-\frac{e}{c}\mathbf{A}\right)=\left(\mathbf{p}-\frac{e}{c}\mathbf{A}\right)\cdot\left(\mathbf{p}-\frac{e}{c}\mathbf{A}\right)+i\boldsymbol{\sigma}\cdot\underbrace{\left[\left(\mathbf{p}-\frac{e}{c}\mathbf{A}\right)\times\left(\mathbf{p}-\frac{e}{c}\mathbf{A}\right)\right]}_{-\frac{e}{c}(\underbrace{\mathbf{p}\times\mathbf{A}}_{=i\hbar(\nabla\times\mathbf{A})-\mathbf{A}\times\mathbf{p}}+\mathbf{A}\times\mathbf{p})}$$

$$=\left(\mathbf{p}-\frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2-\frac{e\hbar}{c}\boldsymbol{\sigma}\cdot(\nabla\times\mathbf{A}) \qquad \nabla\times\mathbf{A}=\mathbf{B}\ :\ \text{磁場}$$

よって

$$\mathcal{H}_{\mathrm{NR}}\simeq\frac{1}{2m}\left(\mathbf{p}-\frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2-\underbrace{\frac{e\hbar}{2mc}\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{B}}_{\equiv\boldsymbol{\mu}\cdot\mathbf{B}}+e\Phi$$

- スピン角運動量 $\mathbf{S}=\frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma}$ に伴う電子の磁気モーメント

$$\boldsymbol{\mu}\equiv\mu_{\mathrm{e}}\boldsymbol{\sigma} \qquad :\quad \mu_{\mathrm{e}}=\frac{e\hbar}{2mc} \quad \Leftrightarrow \quad \text{異常ゼーマン効果}$$

$$\text{実測値}\qquad \mu_{\mathrm{e}}=1.00\underbrace{115965\cdots}_{\text{場の量子論的補正}}\times\frac{e\hbar}{2m_{\mathrm{e}}c} \qquad (\ e=-|e_0|\ )$$

★ 陽子や中性子もスピン $\frac{1}{2}$ のフェルミオン。ミニマル相互作用の Dirac eq. に従うとすると

$$\begin{cases}e_{\text{中性子}}=0\\ e_{\text{陽子}}=|e_0|\end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix}\mu_{\text{中性子}}=0\\ \mu_{\text{陽子}}=\frac{e_0\hbar}{2m_{\text{陽子}}c}\end{matrix}$$

しかし、実測値は

$$\left.\begin{matrix}\mu_{\text{中性子}}\simeq-1.9\times\frac{|e|\hbar}{2m_{\text{中性子}}c}\\[3ex] \mu_{\text{陽子}}\simeq2.8\times\frac{|e|\hbar}{2m_{\text{陽子}}c}\end{matrix}\right\}\neq\ [\ \text{ミニマル相互作用}\ ]$$

陽子や中性子はクォークから構成された複合粒子であり、クォークは点粒子として、ミニマル相互作用をしている。

第 2 近似

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-e\Phi\right)\varphi\simeq\left[\frac{1}{2m}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\pi}-\frac{1}{4m^2c^2}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\pi}\left(i\hbar\overset{\substack{\ulcorner\ \varphi\text{ にもかかる}\\ \downarrow}}{\frac{\partial}{\partial t}}-e\Phi\right)\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\pi}\right]\varphi$$

$$\simeq:\quad O\left(\left(\frac{E_{\rm NR}}{mc^2}\right)^2\right)\ \text{を無視する近似}$$

- $X\equiv\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\pi},\ \ Y\equiv i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-e\Phi$ とおくと

$$Y\varphi\simeq\left(\frac{1}{2m}X^2-\frac{1}{4m^2c^2}XYX\right)\varphi$$

ここで恒等式 $XYX=\frac{1}{2}(X^2Y+YX^2)-\frac{1}{2}[X,[X,Y]]$ を用いて

$$\underbrace{\left(Y+\frac{1}{8m^2c^2}(X^2Y+YX^2)\right)}_{=\left(1+\frac{1}{8m^2c^2}X^2\right)Y\left(1+\frac{1}{8m^2c^2}X^2\right)}\varphi\simeq\left(\frac{1}{2m}X^2+\frac{1}{8m^2c^2}[X,[X,\underbrace{Y}_{\substack{=i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-e\Phi\\ \frac{\partial}{\partial t}\text{ は }\varphi\text{ にはかからない}\\ \because\ \ [X,\frac{\partial}{\partial t}]=-\frac{\partial X}{\partial t}}}]]\right)\varphi$$

- $\psi_{\rm NR}\simeq\left(1+\frac{1}{8m^2c^2}X^2\right)\varphi$ とおくと

$$\begin{aligned}Y\psi_{\rm NR}&\simeq\left(1+\frac{1}{8m^2c^2}X^2\right)^{-1}\left(\frac{1}{2m}X^2+\frac{1}{8m^2c^2}[X,[X,Y]]\right)\left(1+\frac{1}{8m^2c^2}X^2\right)^{-1}\psi_{\rm NR}\\ &\simeq\left(\frac{1}{2m}X^2-\frac{1}{8m^3c^2}X^4+\frac{1}{8m^2c^2}[X,[X,Y]]\right)\psi_{\rm NR}\end{aligned}$$

よって

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi_{\rm NR}=\mathcal{H}_{\rm NR}\psi_{\rm NR}$$

$$\mathcal{H}_{\rm NR}\equiv e\Phi+\frac{1}{2m}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\pi})^2-\frac{1}{8m^3c^2}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\pi})^4+\frac{1}{8m^2c^2}\left[\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\pi},\left[\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\pi},\ i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-e\Phi\right]\right]$$

$$\boldsymbol{\pi}\equiv\mathbf{p}-\frac{e}{c}\mathbf{A}=-i\hbar\nabla-\frac{e}{c}\mathbf{A}$$

★ $\mathcal{H}_{\rm NR}$ のエルミート性

最初の 3 項は明らか $\quad\because\quad(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\pi}\ )^\dagger=(\sigma^i(p^i-\frac{e}{c}A^i))^\dagger=\sigma^i(p^i-\frac{e}{c}A^i)=\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\pi}$

問題：$[\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\pi},i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-e\Phi]=-i\hbar e\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{E}$ $(\mathbf{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}-\nabla\Phi)$ を示せ。

第 4 項も $[\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\pi},-i\hbar e\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{E}]^\dagger=[i\hbar e\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{E},\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\pi}]=[\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\pi},-i\hbar e\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{E}]$ でエルミート

★ $\psi_{\rm NR}\simeq(1+\frac{1}{8m^2c^2}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\pi})^2)\varphi$ の意味

$$\text{D-eq.}\quad i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi=\mathcal{H}\psi\quad\longrightarrow\quad\int d^3\mathbf{x}\ \psi^\dagger\psi=1\quad\text{確率の保存}$$

$$\psi^\dagger\psi=\varphi^\dagger\varphi+\chi^\dagger\chi\simeq\varphi^\dagger\left(1+\frac{1}{4m^2c^2}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\pi})^2\right)\varphi\simeq\psi^\dagger_{\rm NR}\psi_{\rm NR}$$

$$\int d^3\mathbf{x}\ \psi^\dagger_{\rm NR}\psi_{\rm NR}\ \text{の保存}\quad\Leftrightarrow\quad\mathcal{H}_{\rm NR}\ \text{のエルミート性}$$

静的電場

$$\Phi(\mathbf{x})\ ,\quad \mathbf{A}=0\ ,\quad \boldsymbol{\pi}=\mathbf{p}=-i\hbar\nabla$$

$$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p})^2=\mathbf{p}^2\ ,\quad (\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p})^4=(\mathbf{p}^2)^2$$

$$[\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p},-e\Phi]=i\hbar e\boldsymbol{\sigma}\cdot(\nabla\Phi)$$

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p},i\hbar e\boldsymbol{\sigma}\cdot(\nabla\Phi)] &= i\hbar e(\mathbf{p}\cdot(\nabla\Phi)-(\nabla\Phi)\cdot\mathbf{p})+i\boldsymbol{\sigma}\cdot i\hbar e(\mathbf{p}\times(\nabla\Phi)-(\nabla\Phi)\times\mathbf{p})\\ &= \hbar^2 e(\nabla^2\Phi)+2\hbar e\boldsymbol{\sigma}\cdot((\nabla\Phi)\times\mathbf{p})\end{aligned}$$

よって

$$\mathcal{H}_{\rm NR}\simeq\frac{1}{2m}\mathbf{p}^2-\frac{1}{8m^3c^2}(\mathbf{p}^2)^2+e\Phi+\frac{\hbar^2 e}{8m^2c^2}(\nabla^2\Phi)+\frac{\hbar e}{4m^2c^2}\boldsymbol{\sigma}\cdot((\nabla\Phi)\times\mathbf{p})$$

★ 第1、第2項は Einstein の関係式の展開

$$E=\sqrt{m^2c^4+c^2\mathbf{p}^2}=mc^2+\frac{1}{2m}\mathbf{p}^2-\frac{1}{8m^3c^2}(\mathbf{p}^2)^2+\cdots$$

★ 第4項 $\nabla^2\Phi=-{\rm div}\ \mathbf{E}\equiv-\rho_{\rm N}$　　ρ_N : （原子核の）電荷密度

★ 第5項：　中心力 $\Phi(r)$ の場合　$\nabla\Phi=\frac{\mathbf{x}}{r}\frac{d\Phi}{dr}$ だから

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot((\nabla\Phi)\times\mathbf{p})=\frac{1}{r}\frac{d\Phi(r)}{dr}\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{L}\qquad \mathbf{L}\equiv\mathbf{x}\times\mathbf{p}\quad \text{軌道角運動量}$$

水素原子：　$e\Phi=-\frac{e^2}{4\pi r}$

$$\mathcal{H}=\mathcal{H}_0+\Delta\mathcal{H}$$

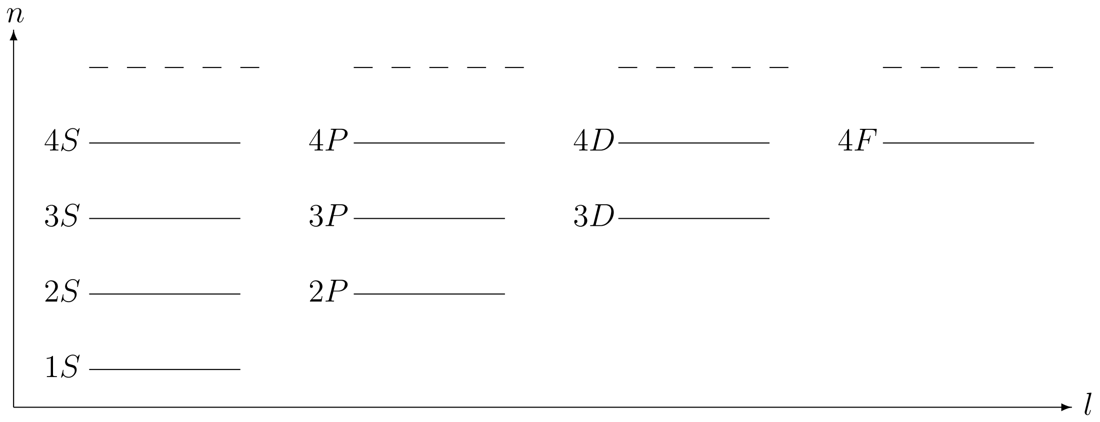
$$\begin{aligned}\mathcal{H}_0&=\frac{1}{2m}\mathbf{p}^2-\frac{e^2}{4\pi r}\\ \Delta\mathcal{H}&=-\frac{1}{8m^3c^2}(\mathbf{p}^2)^2+\frac{\hbar^2e^2}{8m^2c^2}\delta^3(\mathbf{x})+\underbrace{\frac{e^2}{8\pi m^2c^2}\frac{1}{r^3}\mathbf{S}\cdot\mathbf{L}}_{\text{スピン·軌道結合 (L-S coupling)}}\end{aligned}$$

$\mathcal{H}_0$ の固有値と固有状態

$$\left\{\begin{array}{lll} \mathcal{H}_0\ :\ E_0(n) & n\ : & \text{主量子数（}n=1,2,\cdots\text{）}\\ \mathbf{L}^2\ :\ l(l+1)\hbar^2 & l\ : & \text{軌道角運動量（}l=0,1,\cdots,n-1\text{）}\\ L_z\ :\ m\hbar & m\ : & \text{軌道磁気量子数（}m=-l,\cdots,0,\cdots,l\text{）}\end{array}\right.$$

$$E_0(n)=-\frac{e^2}{8\pi a_0}\frac{1}{n^2}\qquad :\ a_0=\frac{4\pi\hbar^2}{me^2}\quad \text{ボーア半径}$$

$\mathcal{H}_0$ のスペクトラム　$: n\ l \quad l = \left\{\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots \\ S & P & D & F & \cdots \end{array}\right.$



L-S 結合のため **L** と **S** は独立には保存しない。しかし

$$[\mathbf{J}, \mathcal{H}] = 0 \qquad : \ \mathbf{J} \equiv \mathbf{L} + \mathbf{S} \qquad \text{全角運動量}$$

$\mathcal{H}$ と可換な演算子：　$\mathbf{J}^2 \Rightarrow j(j+1)\hbar^2,\ J_z,\ \mathbf{L}^2 \Rightarrow l(l+1)\hbar^2,\ \mathbf{S}^2 \Rightarrow s(s+1)\hbar^2 = \frac{3}{4}\hbar^2$

j と l の関係　（角運動量の合成）

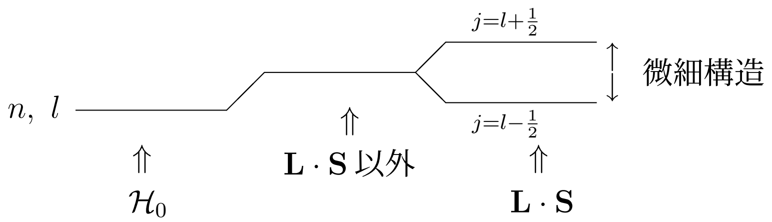
$$\begin{array}{llll} & & |j,m\rangle & \qquad\qquad |l,m\rangle|\pm\rangle \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{lll} \begin{matrix}\mathbf{L} \Longrightarrow \\ \mathbf{S} \Rightarrow\end{matrix} & j = l + \frac{1}{2} & 2j+1 = 2l+2\text{ 個} \\ \\ \begin{matrix}\mathbf{L} \Longrightarrow \\ \mathbf{S} \Leftarrow\end{matrix} & j = l - \frac{1}{2}\ \ (l \neq 0) & 2j+1 = 2l\text{ 個} \end{array}\right\} 4l+2\text{ 個} = (2l+1) \times 2\text{ 個}$$

微細構造

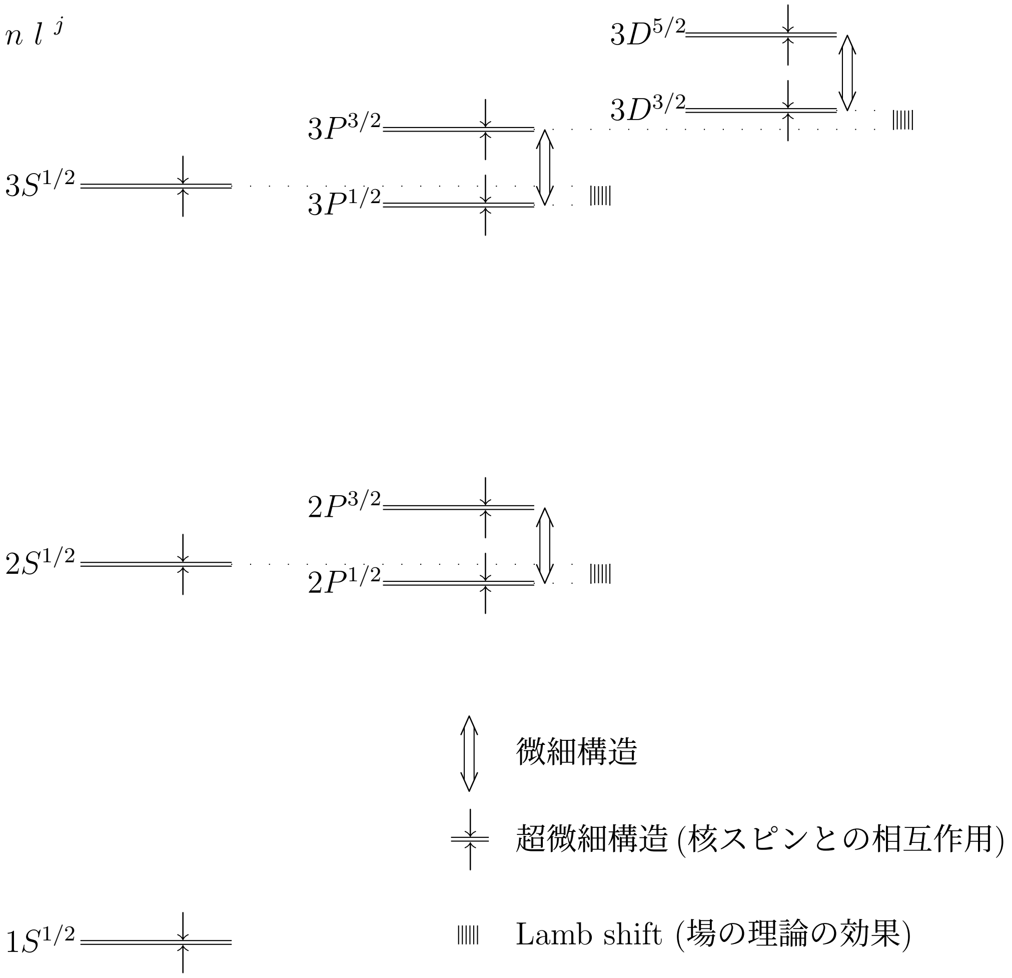
$$\mathbf{J}^2 = (\mathbf{L}+\mathbf{S})^2 = \mathbf{L}^2 + 2\mathbf{L}\cdot\mathbf{S} + \mathbf{S}^2$$

$$\therefore \quad \mathbf{L}\cdot\mathbf{S} = \frac{\hbar^2}{2}\left(j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4}\right) = \left\{\begin{array}{ll} +\frac{\hbar^2}{2}l & : \ j = l + \frac{1}{2} \\ -\frac{\hbar^2}{2}(l+1) & : \ j = l - \frac{1}{2} \end{array}\right.$$



すべてを合計すると

$$\begin{aligned} E &= E_0 + \Delta E \\ \Delta E &= -\left(\frac{e^2}{4\pi\hbar c}\right)^2 \left(\frac{e^2}{8\pi a_0}\right) \frac{1}{n^3} \left(\frac{1}{j+\frac{1}{2}} - \frac{3}{4n}\right) \end{aligned}$$



★ Dirac 方程式の固有値問題を直接正確に解くことは可能。固有値 E の結果は n と j だけで定まり l に陽にはよらない。

第6章　終章 — 相対論的場の量子論 —

6.1　粒子と反粒子

- 相対論的波動方程式

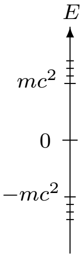
$$\begin{cases} \text{Klein-Gordon 方程式} & \left(\partial_\mu\partial^\mu + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\psi(x) = 0 \\ \\ \text{Dirac 方程式} & (i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc)\psi(x) = 0 \end{cases}$$

- 共に正及び負エネルギー解

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = E\psi \quad \to \quad \psi \propto e^{-\frac{i}{\hbar}Et}$$

$$\text{平面波解}\quad \psi \ \sim \ \begin{cases} e^{-\frac{i}{\hbar}E_k t}e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} & :\text{正エネルギー} \\ e^{\frac{i}{\hbar}E_k t}e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} & :\text{負エネルギー} \end{cases}$$

$$E = \pm E_k\ , \qquad E_k \equiv \sqrt{m^2c^4 + c^2\mathbf{k}^2} \qquad \mathbf{k}\ :\ \text{運動量}$$



$$\psi \ \leftrightarrow \ \psi^* \quad : \quad \text{正エネルギー解}\,(\mathbf{k}) \ \leftrightarrow \ \text{負エネルギー解}\,(-\mathbf{k})$$

- 電磁場中の電荷 e を持った粒子の Klein-Gordon 方程式（スピン 0）

$$\left[\left(\partial^\mu + i\frac{e}{c\hbar}A^\mu\right)\left(\partial_\mu + i\frac{e}{c\hbar}A_\mu\right) + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right]\psi(x) = 0 \qquad \text{電荷}\ e\ ,\ \text{質量}\ m$$

$\psi_c \equiv \psi^*$ とおくと

$$\left[\left(\partial^\mu - i\frac{e}{c\hbar}A^\mu\right)\left(\partial_\mu - i\frac{e}{c\hbar}A_\mu\right) + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right]\psi_c(x) = 0 \qquad \text{電荷}\ -e\ ,\ \text{質量}\ m$$

- 電磁場中の Dirac 方程式（スピン 1/2）

$$\left[i\hbar\gamma^\mu\left(\partial_\mu + i\frac{e}{c\hbar}A_\mu\right) - mc\right]\psi(x) = 0$$

複素共役をとると

$$\left[-i\hbar\gamma^{\mu*}\left(\partial_\mu - i\frac{e}{c\hbar}A_\mu\right) - mc\right]\psi^*(x) = 0$$

γ^μ の性質により $\gamma^{0*} = \gamma^{0T}$, $\gamma^{i*} = -\gamma^{iT}$　$(i = 1, 2, 3)$ だから

$$\gamma^{\mu *} = \gamma^{0T}\gamma^{\mu T}\gamma^{0T}$$

行列 C : 荷電共役行列

$$\gamma^{\mu T} = -C^{-1}\gamma^\mu C$$

Dirac の標準表示 (§ 4.3) では $C = i\gamma^2\gamma^0$　　($C = -C^{-1} = -C^\dagger = -C^T$)

$$\gamma^{\mu *} = -\gamma^{0T}C^{-1}\gamma^\mu C\gamma^{0T}$$

$$C\gamma^{0T} \otimes \quad \left[i\hbar\gamma^{0T}C^{-1}\gamma^\mu C\gamma^{0T}\left(\partial_\mu - i\frac{e}{c\hbar}A_\mu\right) - mc\right]\psi^*(x) = 0$$

$$\left[i\hbar\gamma^\mu\left(\partial_\mu - i\frac{e}{c\hbar}A_\mu\right) - mc\right]C\gamma^{0T}\psi^*(x) = 0$$

よって

$$\psi_c \equiv C\gamma^{0T}\psi^* \qquad \psi_c \ : \ \psi \text{ の荷電共役}$$

とおくと

$$\left[i\hbar\gamma^\mu\left(\partial_\mu - i\frac{e}{c\hbar}A_\mu\right) - mc\right]\psi_c(x) = 0$$

粒子 – 反粒子

$$\left.\begin{array}{lll} \psi & : & \text{質量 } m\text{ ,}\quad \text{電荷 } e \\ \psi_c & : & \text{質量 } m\text{ ,}\quad \text{電荷 } -e \end{array}\right\}\text{粒子}\cdot\text{反粒子}$$

$$\psi \text{ の } \begin{array}{c}\text{正}\\ \text{負}\end{array} \text{ エネルギー解 } \longleftrightarrow \ \psi_c \text{ の } \begin{array}{c}\text{負}\\ \text{正}\end{array} \text{ エネルギー解}$$

相対論的場の方程式 ⟶ 反粒子の存在

電子 ↔ 陽電子
クォーク ↔ 反クォーク
π^+中間子 ↔ π^-中間子
· · ·

★ 実数場　$\psi = \psi^*$　($e = 0$ のときに可能)

粒子 ≡ 反粒子　: 真性中性粒子（ π^0中間子、光子 (電磁場)、$\cdots$ ）

6.2 量子 Dirac 場

相対論的 $\psi(\mathbf{x}, t)$: 1 粒子の量子力学的波動関数としての解釈が困難

$$\left\{\begin{array}{l} \cdot\ \text{負エネルギー解の存在} \\ \cdot\ \text{粒子} \ \leftrightarrow \ \text{反粒子} \ \ (\psi \leftrightarrow \psi_c) \end{array}\right.$$

$$\psi_i(\mathbf{x}, t) \ \to \ \hat{\psi}_i(\mathbf{x}, t) \qquad : \ \text{量子力学的場の演算子}$$

Dirac 場（フェルミ統計）

　場の反交換関係

$$\{\hat{\psi}_i(\mathbf{x},t),\hat{\psi}_j^\dagger(\mathbf{y},t)\}=\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})\delta_{ij}\ ,\quad \{\hat{\psi},\hat{\psi}\}=\{\hat{\psi}^\dagger,\hat{\psi}^\dagger\}=0$$

場のハミルトニアン

$$\hat{H}=\int d^3\mathbf{x}\ \hat{\psi}^\dagger\mathcal{H}\hat{\psi}\qquad :\quad \mathcal{H}=c\boldsymbol{\alpha}\cdot(-i\hbar\nabla)+\beta mc^2$$

Heisenberg 方程式

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\hat{\psi}(\mathbf{x},t) &= -[\hat{H},\hat{\psi}(\mathbf{x},t)]=-\int d^3\mathbf{y}\ \left[\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{y},t)\mathcal{H}_y\hat{\psi}(\mathbf{y},t),\hat{\psi}(\mathbf{x},t)\right] \\ &= \int d^3\mathbf{y}\ \underbrace{\{\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{y},t),\hat{\psi}(\mathbf{x},t)\}}_{\delta^3(\mathbf{y}-\mathbf{x})}\mathcal{H}_y\hat{\psi}(\mathbf{y},t)\end{aligned}$$

$$\therefore\quad i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\hat{\psi}(\mathbf{x},t)=\mathcal{H}\hat{\psi}(\mathbf{x},t)\qquad \Leftarrow\quad \text{Dirac 方程式}$$

モード展開

$$\mathcal{H}\phi_n(\mathbf{x})=E_n\phi_n(\mathbf{x})\quad ;\quad \int d^3\mathbf{x}\ \phi_n^\dagger(\mathbf{x})\phi_m(\mathbf{x})=\delta_{nm}$$

$$\hat{\psi}(\mathbf{x},t)=\sum_n \underset{\substack{\uparrow \\ \text{消滅演算子}}}{\underline{\underline{\hat{a}_n}}}e^{-\frac{i}{\hbar}E_nt}\phi_n(\mathbf{x})$$

<u>$\mathcal{H}$ の固有関数系</u>：§ 5.2 の平面波解 $u_\pm^{(i)}(\mathbf{k})$ を使って

$$\phi_{\mathbf{k},i}^{(\pm)}(\mathbf{x})\equiv\frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}u_\pm^{(i)}(\mathbf{k})\qquad i=1,2\ (\text{スピン状態})$$

$$\mathcal{H}\phi_{\mathbf{k},i}^{(\pm)}(\mathbf{x})=\pm E_k\phi_{\mathbf{k},i}^{(\pm)}(\mathbf{x})\qquad :\ E_k\equiv\sqrt{m^2c^4+c^2\mathbf{k}^2}$$

u の規格直交性

$$u_\pm^{(i)\dagger}(\mathbf{k})u_\pm^{(i')}(\mathbf{k})=\delta_{ii'}\ ,\qquad u_\pm^{(i)\dagger}(\mathbf{k})u_\mp^{(i')}(\mathbf{k})=0$$

により ϕ の規格直交性

$$\int d^3\mathbf{x}\ \phi_{\mathbf{k},i}^{(\pm)\dagger}(\mathbf{x})\phi_{\mathbf{k}',i'}^{(\pm)}(\mathbf{x})=\delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\delta_{ii'}\ ,\qquad \int d^3\mathbf{x}\ \phi_{\mathbf{k},i}^{(\pm)\dagger}(\mathbf{x})\phi_{\mathbf{k}',i'}^{(\mp)}(\mathbf{x})=0$$

<u>モード展開</u>：$n=\{\pm,\ i,\ \mathbf{k}\}$

$$\hat{a}_n\ \rightarrow\ \hat{a}_{\mathbf{k},i}^{(\pm)}\ ,\qquad \sum_n\ \rightarrow\ \sum_{i=1,2}\int d^3\mathbf{k}\sum_\pm$$

$$\hat{\psi}(\mathbf{x},t)=\sum_{i=1,2}\int d^3\mathbf{k}\left(\hat{a}_{\mathbf{k},i}^{(+)}e^{-\frac{i}{\hbar}E_kt}\phi_{\mathbf{k},i}^{(+)}(\mathbf{x})+\hat{a}_{\mathbf{k},i}^{(-)}e^{\frac{i}{\hbar}E_kt}\phi_{\mathbf{k},i}^{(-)}(\mathbf{x})\right)$$

- ホール理論の示唆

[負エネルギー粒子 (**k**) の消滅] = [正エネルギー反粒子 (−**k**) の生成]

$$\begin{cases} \hat{a}^{(+)}_{\mathbf{k},i}(\text{正エネルギー}) & \rightarrow \quad \hat{b}_{\mathbf{k},i} \quad \text{粒子消滅} \\ \hat{a}^{(-)}_{\mathbf{k},i}(\text{負エネルギー}) & \rightarrow \quad \hat{d}^{\dagger}_{-\mathbf{k},i} \quad \text{反粒子生成} \end{cases}$$

$$\hat{\psi}(\mathbf{x},t) = \sum_{i=1,2} \int d^3\mathbf{k} \left(\hat{b}_{\mathbf{k},i} e^{-\frac{i}{\hbar}E_k t} \phi^{(+)}_{\mathbf{k},i}(\mathbf{x}) + \hat{d}^{\dagger}_{\underset{\substack{\downarrow \\ \mathbf{k}}}{\underline{\underline{-\mathbf{k}}}},i} e^{\frac{i}{\hbar}E_k t} \phi^{(-)}_{\underset{\substack{\downarrow \\ -\mathbf{k}}}{\underline{\underline{\mathbf{k}}}},i}(\mathbf{x}) \right)$$

- 反交換関係は $\{\hat{a}_n, \hat{a}^{\dagger}_m\} = \delta_{nm}$ より

$$\{\hat{b}_{\mathbf{k},i}, \hat{b}^{\dagger}_{\mathbf{k}',i'}\} = \{\hat{d}_{\mathbf{k},i}, \hat{d}^{\dagger}_{\mathbf{k}',i'}\} = \delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\delta_{ii'}\ , \quad \text{他の}\ \{*,*\} = 0$$

状態空間

真空 $|0\rangle$ ： $\hat{b}|0\rangle = 0\ ,\ \ \hat{d}|0\rangle = 0$ 　粒子も反粒子も存在しない状態

1 粒子状態 ： $\begin{cases} \hat{b}^{\dagger}_{\mathbf{k},i}|0\rangle & \text{粒子 1 個} \\ \hat{d}^{\dagger}_{\mathbf{k},i}|0\rangle & \text{反粒子 1 個} \end{cases}$

・ ・ ・

ハミルトニアン

$$\begin{aligned} \hat{H} = \sum_n E_n \hat{a}^{\dagger}_n \hat{a}_n &= \sum_{i=1,2} \int d^3\mathbf{k}\ \left(E_k \hat{b}^{\dagger}_{\mathbf{k},i} \hat{b}_{\mathbf{k},i} - E_k \hat{d}_{\mathbf{k},i} \hat{d}^{\dagger}_{\mathbf{k},i} \right) \\ &= \sum_{i=1,2} \int d^3\mathbf{k}\ \left(E_k \underset{\text{粒子数}}{\underline{\underline{\hat{b}^{\dagger}_{\mathbf{k},i} \hat{b}_{\mathbf{k},i}}}} + E_k \underset{\text{反粒子数}}{\underline{\underline{\hat{d}^{\dagger}_{\mathbf{k},i} \hat{d}_{\mathbf{k},i}}}} \right) + [\ \text{定数}\ ] \end{aligned}$$

★ もし $\hat{\psi}$ がボーズ統計に従うとすると、反粒子が生成された状態は際限無く負のエネルギーとなり、$\hat{H}$ は安定な最低エネルギー状態（真空）を持ち得ない。

Dirac 方程式に従う粒子（スピン 1/2 を持った粒子）は

フェルミ統計に従わねばならない !!

6.3 Klein-Gordon 場（ボーズ統計）

実数スカラー場とする：$\hat{\phi}^{\dagger} = \hat{\phi}$ 　（＊ 複素場は 2 個の実数場 $\hat{\phi}_1,\ \hat{\phi}_2$ で $\hat{\phi} = \hat{\phi}_1 + i\hat{\phi}_2$)

$$\text{K-G eq.}\ : \qquad \frac{\partial^2}{\partial t^2}\hat{\phi} = -c^2 \left(-\nabla^2 + \frac{m^2c^2}{\hbar^2} \right) \hat{\phi}$$

t について 2 階微分　↔　Heisenberg 方程式は 1 階

どうする？

調和振動子を思い出す

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + \frac{k}{2}\hat{x}^2 \ , \qquad [\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt}\hat{x} = \frac{1}{i\hbar}[\hat{x}, \hat{H}] = \frac{1}{m}\hat{p} \\ \frac{d}{dt}\hat{p} = \frac{1}{i\hbar}[\hat{p}, \hat{H}] = -k\hat{x} \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2}{dt^2}\hat{x} = -\frac{k}{m}\hat{x}$$

$\hat{x} \to \hat{\phi}, \ \hat{p} \to \hat{\pi}$ と対応付けると

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\hat{\phi} &= c^2\hat{\pi} \\ \frac{\partial}{\partial t}\hat{\pi} &= -\left(-\nabla^2 + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\hat{\phi} \end{aligned}$$

ハミルトニアンは

$$\hat{H} = \int d^3\mathbf{x} \ \frac{1}{2}\left[c^2\hat{\pi}^2(\mathbf{x}, t) + \hat{\phi}(\mathbf{x}, t)\left(-\nabla^2 + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\hat{\phi}(\mathbf{x}, t)\right]$$

場の交換関係は

$$[\hat{\phi}(\mathbf{x}, t), \hat{\pi}(\mathbf{y}, t)] = i\hbar\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \ , \quad [\hat{\phi}(\mathbf{x}, t), \hat{\phi}(\mathbf{y}, t)] = 0 \ , \quad [\hat{\pi}(\mathbf{x}, t), \hat{\pi}(\mathbf{y}, t)] = 0$$

運動方程式はハイゼンベルグの方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{\phi} = \frac{1}{i\hbar}[\hat{\phi}, \hat{H}] \ , \qquad \frac{\partial}{\partial t}\hat{\pi} = \frac{1}{i\hbar}[\hat{\pi}, \hat{H}]$$

で実現される。

モード展開：平面波

$$\hat{\phi}(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \frac{c\hbar}{\sqrt{2E_k}}\left(\hat{a}_{\mathbf{k}} e^{-\frac{i}{\hbar}(E_k t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} + \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}} e^{\frac{i}{\hbar}(E_k t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}\right)$$

場の交換関係は

$$[\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}'}] = \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \ , \qquad [\hat{a}, \hat{a}] = [\hat{a}^\dagger, \hat{a}^\dagger] = 0$$

ハミルトニアンは

$$\hat{H} = \int d^3\mathbf{k} \ \frac{1}{2}E_k\left(\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{a}_{\mathbf{k}}\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}\right) = \int d^3\mathbf{k} \ E_k\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{k}} + [\text{ 定数 }]$$

もしフェルミ統計（反交換関係）で量子化すると $\hat{H} = [\text{定数}]$ で無意味

K-G 方程式に従うスカラー場（スピン０）はボーズ統計に従う　!!

6.4　電磁場

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla A^0$$
$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

Maxwell eq. :　$\partial_\nu \partial^\nu A^\mu - \partial_\nu \partial^\mu A^\nu = 0$　　$A^\mu = (A^0, \mathbf{A})$

ゲージ変換 $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \Lambda$ の不定性

A_μ に条件を課して M-eq. がモードを一意的に定めるようにする。

例： $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$　　クーロンゲージ

$$\text{M-eq.}\begin{cases} \mu = 0 & -\nabla^2 A^0 - \partial^0 \nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \;\to\; \nabla^2 A^0 = 0 \;\to\; A^0 = \text{定数} \\ \mu = i & (\partial_0 \partial^0 - \nabla^2) A^i + \nabla^i (\partial_0 A^0 - \nabla \cdot \mathbf{A}) = 0 \;\to\; (\partial_0 \partial^0 - \nabla^2) A^i = 0 \end{cases}$$

よって電磁場の運動方程式は

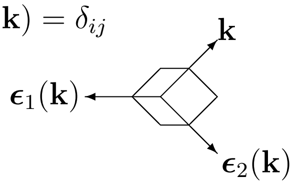
$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0\;, \quad \Box \mathbf{A} = 0 \qquad : \text{光子は0質量}$$

モード展開

$$\hat{\mathbf{A}} = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \frac{c\hbar}{\sqrt{2E_k}} \sum_{i=1,2} \left[\hat{a}_{\mathbf{k},i} \boldsymbol{\epsilon}_i(\mathbf{k}) e^{-\frac{i}{\hbar}(E_k t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} + \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k},i} \boldsymbol{\epsilon}^*_i(\mathbf{k}) e^{\frac{i}{\hbar}(E_k t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} \right]$$

$$\nabla \cdot \hat{\mathbf{A}} = 0 \to\; \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_i(\mathbf{k}) = 0 \quad (i = 1, 2) \qquad \boldsymbol{\epsilon}^*_i(\mathbf{k}) \cdot \boldsymbol{\epsilon}_j(\mathbf{k}) = \delta_{ij}$$

$$\Box \hat{\mathbf{A}} = 0 \;\to\; E_k = c|\mathbf{k}|$$



ハミルトニアン　電場と磁場 $\hat{\mathbf{E}} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \hat{\mathbf{A}}}{\partial t}$, $\hat{\mathbf{B}} = \nabla \times \hat{\mathbf{A}}$ により

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \int d^3\mathbf{x}\; \frac{1}{2}(\hat{\mathbf{E}}^2 + \hat{\mathbf{B}}^2) \\ &= \sum_i \int d^3\mathbf{k}\; \frac{1}{2} E_k \left(\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k},i} \hat{a}_{\mathbf{k},i} + \hat{a}_{\mathbf{k},i} \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k},i} \right) \\ &= \sum_i \int d^3\mathbf{k}\; E_k \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k},i} \hat{a}_{\mathbf{k},i} + [\text{定数}] \end{aligned}$$

交換関係

$$[\hat{a}_{\mathbf{k},i}, \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}',j}] = \delta_{ij} \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}')\;, \quad [\hat{a}, \hat{a}] = [\hat{a}^\dagger, \hat{a}^\dagger] = 0 \qquad \text{光子はボソン}$$

により $\hat{\mathbf{A}}$ の運動が Heisenberg 方程式で実現される。

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{A}}}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar}[\hat{\mathbf{A}}, \hat{H}]$$