量子力学III　演習問題

(I-3-1) 3次元ベクトル $\vec{V} = (V_x, V_y, V_z)$ を x 軸のまわりで角度 θ だけ回転すると $\vec{V}' = (V_x, V_y\cos\theta - V_z\sin\theta, V_z\cos\theta + V_y\sin\theta)$ となる．これを３行３列の行列を用いて

$$\vec{V}' = U_x(\theta)\vec{V}\ ,\quad U_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{1}$$

と表そう．同様に y 軸回りおよび z 軸回りの回転の行列は

$$U_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}\ ,\qquad U_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

である．α, β を微少回転角としたとき

$$U_y(-\beta)U_x(-\alpha)U_y(\beta)U_x(\alpha) \cong U_z(-\alpha\beta) \tag{3}$$

が微少量の２次までの近似で成り立つことを確かめよ．この関係式は回転操作の幾何学を表現しているものであるから，量子力学においても成り立たなければならない．x, y, z 軸回りの微少回転角 α, β, γ の回転のユニタリー演算子を $e^{-\frac{i}{\hbar}\alpha\hat{J}_x}, e^{-\frac{i}{\hbar}\beta\hat{J}_y}, e^{-\frac{i}{\hbar}\gamma\hat{J}_z}$ とすると

$$e^{\frac{i}{\hbar}\beta\hat{J}_y}e^{\frac{i}{\hbar}\alpha\hat{J}_x}e^{-\frac{i}{\hbar}\beta\hat{J}_y}e^{-\frac{i}{\hbar}\alpha\hat{J}_x} \cong e^{-\frac{i}{\hbar}(-\alpha\beta)\hat{J}_z} \tag{4}$$

が成り立つ．この両辺を微少量の２次まで展開し，$\alpha\beta$ の項を比較することにより，角運動量の交換関係 $[\hat{J}_x, \hat{J}_y] = i\hbar\hat{J}_z$ を導け.

(I-4-1) スピン 1/2 の粒子の $S_z = \pm\hbar/2$ の固有ベクトルを 2 成分波動関数で

$$\psi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\ ,\quad \psi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\ :\qquad S_z\psi_\pm = \pm\frac{\hbar}{2}\psi_\pm \tag{5}$$

と表すと，一般の量子状態の波動関数 ψ は

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \end{pmatrix} \tag{6}$$

である．ψ に作用するスピンの回転のユニタリー演算子は，回転軸を $\vec{n}$ ($|\vec{n}| = 1$)，回転角を Ω とすると，2 行 2 列の行列表現で $e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{\Omega}\cdot\vec{S}} = e^{-\frac{i}{2}\vec{\Omega}\cdot\vec{\sigma}}$ ($\vec{\Omega} \equiv \Omega\vec{n}$) と表される．パウリ行列 $\vec{\sigma}$ について $(\vec{n}\cdot\vec{\sigma})^2 = \vec{n}\cdot\vec{n} = 1$ が成り立つことに注意して

$$e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{\Omega}\cdot\vec{S}} = \cos\frac{\Omega}{2} - i\vec{n}\cdot\vec{\sigma}\sin\frac{\Omega}{2} \tag{7}$$

を導け．ψ を $\Omega = 2\pi$ で１回転したとき $e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{\Omega}\cdot\vec{S}}\psi = -\psi$ となり，波動関数はもとに戻らず符合が反転する．これは半整数スピンの粒子の波動関数の特徴である．$\psi_\pm$ を y 軸回り $(n = (0, 1, 0))$ で $\Omega = \pi/2$ 回転したものを

$$\psi_R \equiv e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{\pi}{2}S_y}\psi_+\ ,\qquad \psi_L \equiv e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{\pi}{2}S_y}\psi_- \tag{8}$$

とすると，ψ_R, ψ_L が S_x の固有状態

$$S_x \psi_R = \frac{\hbar}{2}\psi_R \ , \qquad S_x \psi_L = -\frac{\hbar}{2}\psi_L \tag{9}$$

であることを確かめよ．

(II-2-1) 粒子間相互作用のない n 個の同種 fermion が，それぞれ１粒子ハミルトニアン $\hat{H}(\hat{O}_i)$ $(\hat{O}_i = \hat{\vec{x}}_i, \hat{\vec{p}}_i, \hat{\vec{S}}_i)$ の固有値 $E_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ の固有状態 $|E_1\rangle, |E_2\rangle, \cdots, |E_n\rangle$ にいるとする．それぞれの規格化された波動関数を $\langle \xi | E_i \rangle = \phi_i(\xi)$ としよう．ここに $|\xi\rangle$ は，例えば $\hat{\vec{x}}$ と $\hat{S}_z$ の同時固有状態 $|\xi\rangle = |\vec{x}, \lambda\rangle$

$$\hat{\vec{x}}|\vec{x},\lambda\rangle = \vec{x}|\vec{x},\lambda\rangle \ , \quad \hat{S}_z|\vec{x},\lambda\rangle = \hbar\lambda|\vec{x},\lambda\rangle \ : \qquad \langle \vec{x}', \lambda' | \vec{x}, \lambda\rangle = \delta^3(\vec{x}' - \vec{x})\delta_{\lambda'\lambda} \tag{10}$$

であり、$\sum_\lambda \int d^3\vec{x} \phi_i^*(\vec{x},\lambda)\phi_j(\vec{x},\lambda) = \delta_{ij}$ を満たす．このとき，全系の波動関数が

$$\psi(\xi_1, \cdots, \xi_n; t) = \frac{1}{\sqrt{n!}} \begin{vmatrix} \phi_1(\xi_1) & \cdots & \phi_1(\xi_n) \\ \phi_2(\xi_1) & \cdots & \phi_2(\xi_n) \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \phi_n(\xi_1) & \cdots & \phi_n(\xi_n) \end{vmatrix} e^{-\frac{i}{\hbar}\sum_{i=1}^{n} E_i t} \ : \qquad \xi_i = \{\vec{x}_i, \lambda_i\} \tag{11}$$

と表され、

$$\sum_{\lambda_1, \cdots, \lambda_n} \int d^3\vec{x}_1 \cdots d^3\vec{x}_n \psi^*(\xi_1, \cdots, \xi_n; t)\psi(\xi_1, \cdots, \xi_n; t) = 1 \tag{12}$$

と規格化されていることを示せ．(11) の行列式は Slater 行列式と呼ばれる．

(III-1-1) 空間１次元のボーズ統計のシュレディンガー場 $\hat{\psi}(x,t)$ の１粒子ハミルトニアン $\mathcal{H}$ が，角振動数 ω の調和振動子 (+ 定数) であるとしよう．$\mathcal{H}$ の固有値 ε_n $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ は定数 M により

$$\varepsilon_n = M + \hbar\omega(n + 1/2) \ : \qquad n = 0, 1, 2, \cdots \tag{13}$$

である．それぞれの生成演算子を $\hat{a}_n^\dagger$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ と表すと，ハミルトニアンは

$$\hat{H} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_n \tag{14}$$

である．粒子数表示での状態 $|N_0, N_1, N_2, \cdots\rangle$ のエネルギーは

$$E(N_0, N_1, N_2, \cdots) = (M + \hbar\omega/2)\sum_{n=0}^{\infty} N_n + \hbar\omega \sum_{n=0}^{\infty} n N_n \tag{15}$$

であり，全粒子数は $N = \sum_{n=0}^{\infty} N_n$ である．(15) の第２項の $\hbar\omega$ の係数を R とおくと R は 0 もしくは正の整数であり，エネルギー (15) は

$$E(N, R) = (M + \hbar\omega/2)N + \hbar\omega R \tag{16}$$

と表される．全粒子数が $N = 3$ でエネルギーが $E(3,0), E(3,1), E(3,2), E(3,3), E(3,4)$ であるすべての規格化された状態を書き下せ (縮退度はそれぞれ 1,1,2,3,4 である)．

(III-1-2) **(III-1-1)** の問題で，演算子 $\hat{X} = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_{n+1}$ を定義する．

$$[\hat{H}, \hat{X}] = -\hbar\omega \hat{X} \ , \qquad [\hat{H}, \hat{X}^\dagger] = \hbar\omega \hat{X}^\dagger \tag{17}$$

を示せ．これにもとづき，$[\hat{H}, \hat{X}^\dagger \hat{X}] = 0$ を確かめよ．したがって $\hat{H}$ と $\hat{X}^\dagger \hat{X}$ には同時固有状態が可能である．$N = 2$，$R = 2$ のエネルギー準位 $E(2,2)$ には，２個の状態

$$|A\rangle = \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_2^\dagger |0\rangle \ , \quad |B\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a}_1^\dagger)^2 |0\rangle \tag{18}$$

が縮退している．それらの２種の重ね合わせ

$$|C\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\hat{a}_0^\dagger \hat{a}_2^\dagger + (\hat{a}_1^\dagger)^2 \right) |0\rangle \ , \quad |D\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\hat{a}_0^\dagger \hat{a}_2^\dagger - \frac{1}{2} (\hat{a}_1^\dagger)^2 \right) |0\rangle \tag{19}$$

がそれぞれ $\hat{X}^\dagger \hat{X}$ の固有値 3 と 0 の固有ベクトルであることを確かめよ．

(III-1-3) ボーズ統計のシュレディンガー場 $\hat{\psi}(\vec{x})$, $\hat{\psi}^\dagger(\vec{x})$ は交換関係

$$[\hat{\psi}(\vec{x}), \hat{\psi}^\dagger(\vec{y})] = \delta^3(\vec{x} - \vec{y}), \quad [\hat{\psi}(\vec{x}), \hat{\psi}(\vec{y})] = [\hat{\psi}^\dagger(\vec{x}), \hat{\psi}^\dagger(\vec{y})] = 0 \tag{20}$$

を満たす．$\phi(\vec{x})$ を $\hat{\psi}$ と可換な任意の関数とする．公式 [I]-(7) にもとづいて，以下の変換式を確かめよ．

$$e^{-\int d^3\vec{x} \hat{\psi}^\dagger(\vec{x})\phi(\vec{x})} \hat{\psi}(\vec{y}) e^{\int d^3\vec{x} \hat{\psi}^\dagger(\vec{x})\phi(\vec{x})} = \hat{\psi}(\vec{y}) + \phi(\vec{y}) \ . \tag{21}$$

$\hat{\psi}(\vec{x})|0\rangle = 0$, $\langle 0|0\rangle = 1$ を満たす $\hat{\psi}$ のフォック真空 $|0\rangle$ をもちいて状態 $|\phi\rangle$ を

$$|\phi\rangle \equiv e^{\int d^3\vec{x} \hat{\psi}^\dagger(\vec{x})\phi(\vec{x})} |0\rangle \tag{22}$$

と定義する．$|\phi\rangle$ はコヒーレント状態と呼ばれる．等式

$$\hat{\psi}(\vec{x})|\phi\rangle = \phi(\vec{x})|\phi\rangle \ , \qquad \langle \hat{\psi}(\vec{x}) \rangle \equiv \frac{\langle \phi | \hat{\psi}(\vec{x}) | \phi \rangle}{\langle \phi | \phi \rangle} = \phi(\vec{x}) \ , \tag{23}$$

および，ハミルトニアン $\hat{H} = \int d^3\vec{x} \ \hat{\psi}^\dagger(\vec{x}) \mathcal{H} \hat{\psi}(\vec{x})$ と全粒子数演算子 $\hat{N} = \int d^3\vec{x} \ \hat{\psi}^\dagger(\vec{x}) \hat{\psi}(\vec{x})$ の期待値の表式

$$\langle H \rangle \equiv \frac{\langle \phi | \hat{H} | \phi \rangle}{\langle \phi | \phi \rangle} = \int d^3\vec{x} \ \phi^*(\vec{x}) \mathcal{H} \phi(\vec{x}) \ , \qquad \langle N \rangle \equiv \frac{\langle \phi | \hat{N} | \phi \rangle}{\langle \phi | \phi \rangle} = \int d^3\vec{x} \ \phi^*(\vec{x}) \phi(\vec{x}) \tag{24}$$

を確かめよ．$|\phi\rangle$ のノルム $\langle \phi | \phi \rangle$ は $\langle 0 | \hat{\psi}^\dagger(\vec{x}) = 0$ に注意すると

$$\begin{aligned}
\langle \phi | \phi \rangle &\equiv \langle 0 | e^{\int d^3\vec{y} \ \hat{\psi}(\vec{y})\phi^*(\vec{y})} e^{\int d^3\vec{x} \ \hat{\psi}^\dagger(\vec{x})\phi(\vec{x})} |0\rangle \\
&= \langle 0 | e^{-\int d^3\vec{x} \ \hat{\psi}^\dagger(\vec{x})\phi(\vec{x})} e^{\int d^3\vec{y} \ \hat{\psi}(\vec{y})\phi^*(\vec{y})} e^{\int d^3\vec{x} \ \hat{\psi}^\dagger(\vec{x})\phi(\vec{x})} |0\rangle \\
&= \langle 0 | \exp \left[\int d^3\vec{y} \ e^{-\int d^3\vec{x} \ \hat{\psi}^\dagger(\vec{x})\phi(\vec{x})} \hat{\psi}(\vec{y}) e^{\int d^3\vec{x} \ \hat{\psi}^\dagger(\vec{x})\phi(\vec{x})} \phi^*(\vec{y}) \right] |0\rangle
\end{aligned} \tag{25}$$

と表される．これから

$$\langle \phi | \phi \rangle = e^{\int d^3\vec{x} \ \phi^*(\vec{x})\phi(\vec{x})} \tag{26}$$

を導け．

時刻 t の状態 $|\phi(t)\rangle$ が $t=0$ に $|\phi(0)\rangle = |\phi\rangle$ だとすると，$|\phi(t)\rangle$ は $\hat{H}|0\rangle = 0$ により

$$\begin{aligned} |\phi(t)\rangle &\equiv e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t} e^{\int d^3\vec{x}\,\hat{}\psi^\dagger(\vec{x})\phi(\vec{x})}|0\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t} e^{\int d^3\vec{x}\ \hat{\psi}^\dagger(\vec{x})\phi(\vec{x})} e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}|0\rangle \\ &= \exp\left[\int d^3\vec{x}\ e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}\hat{\psi}^\dagger(\vec{x}) e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}\phi(\vec{x})\right]|0\rangle \end{aligned} \tag{27}$$

である．公式 (17) をもちいて

$$|\phi(t)\rangle = e^{\int d^3\vec{x}\ \hat{\psi}^\dagger(\vec{x})\phi(\vec{x},t)}|0\rangle \ : \qquad \phi(\vec{x},t) = e^{-\frac{i}{\hbar}\mathcal{H}t}\phi(\vec{x}) \tag{28}$$

を導け．ここに，$\phi(\vec{x},t)$ は初期条件 $\phi(\vec{x},0) = \phi(\vec{x})$ を満たす１粒子シュレディンガー方程式 $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\phi(\vec{x},t) = \mathcal{H}\phi(\vec{x},t)$ の解である．$\phi(\vec{x})$ が１粒子ハミルトニアン $\mathcal{H}$ の 0 固有値の固有関数 $(\mathcal{H}\phi(\vec{x}) = 0)$ のときには

$$|\phi(t)\rangle = |\phi\rangle \tag{29}$$

となりコヒーレント状態は時間発展せず，そのエネルギーは $\hat{H}|\phi\rangle = 0$ により $E = 0$ である．

(III-2-1) フェルミ場の量子系において，１粒子ハミルトニアン $\mathcal{H}$ の固有値が小さい方から順に等間隔で $\varepsilon_1 = \varepsilon, \varepsilon_2 = 2\varepsilon, \varepsilon_3 = 3\varepsilon, \cdots$ であるとする (スピンによる縮退は考えないことにする)．それぞれの生成演算子を $\hat{a}_1^\dagger, \hat{a}_2^\dagger, \hat{a}_3^\dagger, \cdots$ と表す．全粒子数が 4 の系について，最低エネルギー状態，第１励起状態，第２励起状態，および第３励起状態のエネルギーおよびそれぞれの状態ベクトルを与えよ (第２励起状態は２重縮退，第３励起状態は３重縮退している)．

(III-3-1) シュレディンガー場 $\hat{\psi}(\vec{x}), \hat{\psi}^\dagger(\vec{x})$ の積についての以下の行列要素

$$\langle 0|\hat{\psi}(\vec{x}_1)\cdots\hat{\psi}(\vec{x}_N)\hat{\psi}^\dagger(\vec{x}'_N)\cdots\hat{\psi}^\dagger(\vec{x}'_1)|0\rangle = \sum_{\{\sigma_i\}} S_\sigma \delta^3(\vec{x}_1 - \vec{x}'_{\sigma_1})\cdots\delta^3(\vec{x}_N - \vec{x}'_{\sigma_N}) \tag{30}$$

を導け．ここに $\{\sigma_i\}$ の和は $\{1,\cdots,N\}$ のすべての置換についてとる．符合 S_σ は，$\hat{\psi}$ が Bose 統計のときは $S_\sigma = +1$ である．Fermi 統計のときは，$\{\sigma_i\}$ が偶置換のとき $S_\sigma = +1$，奇置換のとき $S_\sigma = -1$ である．

(III-3-2) シュレディンガー場の N 粒子状態 $|\Psi_N\rangle$ を波動関数を用いて

$$|\Psi_N\rangle = \int d^3\vec{x}_1\cdots d^3\vec{x}_N \hat{\psi}^\dagger(\vec{x}_N)\cdots\hat{\psi}^\dagger(\vec{x}_1)|0\rangle\psi(\vec{x}_1,\cdots,\vec{x}_N) \tag{31}$$

と表す．$\psi(\vec{x}_1,\cdots,\vec{x}_N)$ は Bose 統計では完全対称な関数，Fermi 統計では完全反対称な関数である．波動関数が

$$\psi(\vec{x}_1,\cdots,\vec{x}_N) = \frac{1}{N!}\langle 0|\hat{\psi}(\vec{x}_1)\cdots\hat{\psi}(\vec{x}_N)|\Psi_N\rangle \tag{32}$$

と表されることを確かめよ．また，状態ベクトルを $\langle\Psi_N|\Psi_N\rangle = 1$ と規格化するためには波動関数が

$$\int d^3\vec{x}_1\cdots d^3\vec{x}_N \psi^*(\vec{x}_1,\cdots,\vec{x}_N)\psi(\vec{x}_1,\cdots,\vec{x}_N) = \frac{1}{N!} \tag{33}$$

でなければならないことを示せ．

(III-4-1) 粒子数密度演算子 $\hat{\rho}(\vec{x},t)=\hat{\psi}^\dagger(\vec{x},t)\hat{\psi}(\vec{x},t)$ によって２体相互作用をしている場の量子系のハミルトニアン

$$\hat{H}=\int d^3\vec{x}\hat{\psi}^\dagger(\vec{x},t)\mathcal{H}_0\hat{\psi}(\vec{x},t)+\frac{1}{2}\int d^3\vec{x}d^3\vec{y}\ \hat{\rho}(\vec{x},t)V_{\rm int}(\vec{x}-\vec{y})\hat{\rho}(\vec{y},t) \tag{34}$$

が，相互作用項が normal order されたハミルトニアン

$$\hat{H}=\int d^3\vec{x}\hat{\psi}^\dagger(\vec{x},t)\mathcal{H}\hat{\psi}(\vec{x},t)+\frac{1}{2}\int d^3\vec{x}d^3\vec{y}\hat{\psi}^\dagger(\vec{x},t)\hat{\psi}^\dagger(\vec{y},t)V_{\rm int}(\vec{x}-\vec{y})\hat{\psi}(\vec{y},t)\hat{\psi}(\vec{x},t) \tag{35}$$

と $\mathcal{H}=\mathcal{H}_0+\frac{1}{2}V_{\rm int}(\vec{0})$ のもとで等価であることを確かめよ．

(III-4-2) (III-4-1) のハミルトニアンが Bose 統計，Fermi 統計いずれでも，全粒子数演算子

$$\hat{N}=\int d^3\vec{x}\hat{\psi}^\dagger(\vec{x},t)\hat{\psi}(\vec{x},t) \tag{36}$$

と可換 $[\hat{H},\hat{N}]=0$ であることを示せ．したがって全粒子数は保存量である．

(IV-3-1) ディラック方程式

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{x},t)=\left(c\vec{\alpha}\cdot(-i\hbar\vec{\nabla})+mc^2\beta\right)\psi(\vec{x},t) \tag{37}$$

のエルミート共役をとると，${\alpha^i}^\dagger=\alpha^i$, $\beta^\dagger=\beta$ により

$$-i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi^\dagger(\vec{x},t)=c(+i\hbar\vec{\nabla})\psi^\dagger(\vec{x},t)\cdot\vec{\alpha}+mc^2\psi^\dagger(\vec{x},t)\beta \tag{38}$$

となる．確率密度 $\rho(\vec{x},t)$ と確率の流れの密度 $\vec{j}(\vec{x},t)$ を

$$\rho(\vec{x},t)=\psi^\dagger(\vec{x},t)\psi(\vec{x},t)\ ,\quad \vec{j}(\vec{x},t)=c\psi^\dagger(\vec{x},t)\vec{\alpha}\psi(\vec{x},t) \tag{39}$$

と定義すると，これらが確率の保存のために不可欠な連続の方程式

$$\frac{\partial\rho(\vec{x},t)}{\partial t}+{\rm div}\ \vec{j}(\vec{x},t)=0 \tag{40}$$

を満たすことを示せ．

(IV-3-2) ディラック方程式に現れる４個のエルミート行列 α^i $(i=1,2,3)$, β を N 行 N 列の行列だとして求めよう．それらが，$I^{(N)}$ を N 行 N 列の単位行列として

$$\alpha^i\alpha^j+\alpha^j\alpha^i=2\delta^{ij}I^{(N)}\ ,\quad \alpha^i\beta+\beta\alpha^i=0\ ,\quad \beta^2=I^{(N)} \tag{41}$$

を満たしているとする．第１式で $i=j$ とおくと $(\alpha^i)^2=I^{(N)}$ である．$i\neq j$ の式から $\alpha^i=-\alpha^j\alpha^i\alpha^j$ が導かれる．また，第２式から $\beta=-\alpha^i\beta\alpha^i$ が導かれる．これらのトレースをとることにより

$$\mathrm{tr}\ \alpha^i=0\ ,\quad \mathrm{tr}\ \beta=0 \tag{42}$$

を確かめよ．したがって，４個の行列 α^i $(i=1,2,3)$, β はすべてトレースは 0 である．

α^i, β にはユニタリー行列 U によるユニタリー変換 $U\alpha^iU^\dagger$, $U\beta U^\dagger$ の不定性がある．この自由度によって，一般性をそこなうことなしに，例えば β を対角行列にとることができ

る．$\beta^2 = I^{(N)}$ だから，β の対角要素は ± 1 であるが，$\mathrm{tr}\ \beta = 0$ なので $+1$ と -1 の個数はともに $N/2$ 個となる (すなわち N は偶数でなければならない)．それを

$$\beta = \begin{pmatrix} I^{(N/2)} & 0 \\ 0 & -I^{(N/2)} \end{pmatrix} \tag{43}$$

と表そう．(41) の第２式を満たす α^i が，$N/2$ 行 $N/2$ 列の行列 A^i によって

$$\alpha^i = \begin{pmatrix} 0 & A^i \\ A^{i\dagger} & 0 \end{pmatrix} \tag{44}$$

と表されることを確かめよ．$(\alpha^i)^2 = I^{(N)}$ だから A^i は

$$A^i A^{i\dagger} = A^{i\dagger} A^i = I^{(N/2)} \tag{45}$$

を満たさなければならない．(41) の第１式の $i \neq j$ の条件から

$$A^i A^{j\dagger} = -A^j A^{i\dagger}\ ,\quad A^{i\dagger} A^j = -A^{j\dagger} A^i \tag{46}$$

を導け．$N = 2$ とすると A^i は絶対値が１の３個の単なる複素数となる．(46) は $A^1 A^{2*}$, $A^1 A^{3*}$, $A^2 A^{3*}$ がすべて純虚数であることを要求しているが，それは不可能である．$A^1 A^{2*}$, $A^1 A^{3*}$ が純虚数であれば $A^2 A^{3*}$ は実数になる．したがって，２行２列の行列で α^i $(i = 1, 2, 3)$, β を構成することはできない．最小の行列は $N = 4$ である．２行２列の行列 A^i をパウリ行列 $\vec{\sigma} = (\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3)$ によって

$$A^i = A^{i\dagger} = \sigma^i \ \ : \quad \sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},\ \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{47}$$

とおくと (45),(46) が満たされることを確かめよ．

(IV-4-1) ディラックの波動関数 ψ のローレンツ変換 $S\psi$ を微少変換だけでなく，有限変換まで含めて求めよう．まず微少ローレンツ変換が

$$a(\epsilon)^\mu{}_\nu \ \simeq \ \delta^\mu_\nu + \epsilon^\mu{}_\nu = \delta^\mu_\nu - \frac{i}{2}(\Sigma^{\alpha\beta})^\mu{}_\nu \epsilon_{\alpha\beta} \tag{48}$$

$$(\Sigma^{\alpha\beta})^\mu{}_\nu \equiv i(g^{\mu\alpha}\delta^\beta_\nu - g^{\mu\beta}\delta^\alpha_\nu) \tag{49}$$

と表されることを確かめよ．$\Sigma^{\alpha\beta}(= -\Sigma^{\beta\alpha})$ は４行４列の行列である．有限のローレンツ変換のパラメターを $\Lambda_{\alpha\beta}(= -\Lambda_{\beta\alpha})$ とし，微少パラメターを $\epsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{N}\Lambda_{\alpha\beta}$ $(N \to \infty)$ とおく．$\epsilon_{\alpha\beta}$ の微少ローレンツ変換を N 回行うと $\Lambda_{\alpha\beta}$ の有限ローレンツ変換になるので

$$a(\Lambda)^\mu{}_\nu = ((a(\epsilon))^N)^\mu{}_\nu = \left(\left(1 - \frac{i}{2}\Sigma^{\alpha\beta}\frac{\Lambda_{\alpha\beta}}{N}\right)^N\right)^\mu{}_\nu \underset{N\to\infty}{=} \left(e^{-\frac{i}{2}\Sigma^{\alpha\beta}\Lambda_{\alpha\beta}}\right)^\mu{}_\nu \tag{50}$$

である．したがって S も同様に

$$S(\Lambda) = (S(\epsilon))^N = \left(1 - \frac{i}{4}\sigma^{\alpha\beta}\frac{\Lambda_{\alpha\beta}}{N}\right)^N \underset{N\to\infty}{=} e^{-\frac{i}{4}\sigma^{\alpha\beta}\Lambda_{\alpha\beta}} \tag{51}$$

と求まる．

(V-4-1) 相対論の自由粒子のエネルギー $E=c\sqrt{m^2c^2+\vec{p}^{\,2}}$ から，置き換えルールにもとづいて電磁場中の運動方程式を導こう．エネルギーは

$$E=c\sqrt{m^2c^2+\left(\vec{p}-\frac{e}{c}\vec{A}\right)^2}+eA^0(\vec{x},t)\equiv H(\vec{p},\vec{x}) \tag{52}$$

である．$\vec{x}$ の正準運動方程式は

$$\dot{x}^i=\frac{\partial H}{\partial p^i}=\frac{c(p^i-\frac{e}{c}A^i)}{\sqrt{m^2c^2+(\vec{p}-\frac{e}{c}\vec{A})^2}} \tag{53}$$

となる．$\pi^i\equiv p^i-\frac{e}{c}A^i$ とおいて，(53) により π^i を $\dot{x}^i$ の関数として解くことにより

$$\pi^i\equiv p^i-\frac{e}{c}A^i=\frac{m\dot{x}^i}{\sqrt{1-\dot{\vec{x}}^2/c^2}} \tag{54}$$

を導け．$\vec{\pi}$ は粒子の力学的運動量を表している．p^i の正準運動方程式は

$$\dot{p}^i=-\frac{\partial H}{\partial x^i}=-e\frac{\partial A^0}{\partial x^i}-\frac{c(p^l-\frac{e}{c}A^l)(-\frac{e}{c})\frac{\partial A^l}{\partial x^i}}{\sqrt{m^2c^2+(\vec{p}-\frac{e}{c}\vec{A})^2}}=-e\frac{\partial A^0}{\partial x^i}-\dot{x}^l(-\frac{e}{c})\frac{\partial A^l}{\partial x^i} \tag{55}$$

となる (最後の表式は (53) をもちいた)．$\vec{\pi}$ の時間変化 $\dot{\vec{\pi}}$ は，A^i が粒子の座標 $\vec{x}$ と時刻 t の関数 $A(\vec{x},t)$ であることに注意すると

$$\dot{\pi}^i=\dot{p}^i-\frac{e}{c}\frac{\partial A^i}{\partial t}-\frac{e}{c}\frac{\partial A^i}{\partial x^l}\dot{x}^l \tag{56}$$

と表される．これに (55) を代入し，$\vec{\pi}$ を粒子の速度 $\vec{v}\equiv\dot{\vec{x}}$ で表すことにより，ローレンツの力による粒子の運動方程式

$$\frac{d}{dt}\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\vec{v}^2/c^2}}=e\vec{E}+\frac{e}{c}\vec{v}\times\vec{B} \tag{57}$$

が成り立つことを確かめよ．電場と磁場は $\vec{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}-\vec{\nabla}A^0$, $\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}$ である．

(V-5-1) パウリのスピン行列

$$\sigma^1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\ \sigma^2=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix},\ \sigma^3=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix} \tag{58}$$

について

$$\{\sigma^i,\sigma^j\}=2\delta^{ij}I\ ,\quad [\sigma^i,\sigma^j]=2i\sum_{k=1}^{3}\epsilon^{ijk}\sigma^k \tag{59}$$

を確かめよ．ここに I は 2 行 2 列の単位行列，ϵ^{ijk} は 3 階の完全反対称テンソル ($\epsilon^{123}=\epsilon^{231}=\epsilon^{312}=1$, $\epsilon^{321}=\epsilon^{213}=\epsilon^{132}=-1$, 他は 0) である．したがって

$$\sigma^i\sigma^j=\frac{1}{2}\{\sigma^i,\sigma^j\}+\frac{1}{2}[\sigma^i,\sigma^j]=\delta^{ij}I+i\sum_{k=1}^{3}\epsilon^{ijk}\sigma^k \tag{60}$$

が成り立つ．$\hat{\vec{a}}, \hat{\vec{b}}$ を任意のベクトル演算子としたとき

$$(\vec{\sigma}\cdot\hat{\vec{a}})(\vec{\sigma}\cdot\hat{\vec{b}}) = \hat{\vec{a}}\cdot\hat{\vec{b}} + i\vec{\sigma}\cdot(\hat{\vec{a}}\times\hat{\vec{b}}) \tag{61}$$

が成り立つことを確かめよ．

(V-5-2) 一様な定数磁場 $\vec{B}$ 中での電子の運動のハミルトニアン演算子 $\hat{H}$ は，$\nabla\times\vec{A}(\vec{x}) = \vec{B}$, $\nabla\cdot\vec{A}(\vec{x}) = 0$ なるベクトルポテンシャル $\vec{A}(\vec{x})$ をもちいると，相対論的効果の１次までで

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\left(\hat{\vec{p}} - \frac{e}{c}\vec{A}(\hat{\vec{x}})\right)^2 - \frac{e}{mc}\hat{\vec{S}}\cdot\vec{B} \quad : \qquad \hat{\vec{S}}^2 = \frac{3}{4}\hbar^2 \tag{62}$$

と表される．この量子系をハイゼンベルグ描像で考察しよう．ハイゼンベルグの運動方程式 $\dot{\hat{O}}(t) = \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{O}(t)]$ にもとづき

$$\dot{\hat{x}}^i = \frac{1}{m}(\hat{p}^i - \frac{e}{c}A^i(\hat{\vec{x}})) = \frac{1}{m}\hat{\pi}^i \quad : \qquad \hat{\pi}^i = \hat{p}^i - \frac{e}{c}A^i(\hat{\vec{x}}) \ , \tag{63}$$

$$\dot{\hat{p}}^i = \frac{e}{mc}\sum_{j=1}^{3}(\hat{p}^j - \frac{e}{c}A^j(\hat{\vec{x}}))\nabla^i A^j(\hat{\vec{x}}) = \frac{e}{mc}\sum_{j=1}^{3}\hat{\pi}^j\nabla^i A^j(\hat{\vec{x}}) \tag{64}$$

を導け．$\hat{\pi}^i$ は電子の力学的運動量を表している．その大きさの２乗 $(\hat{\vec{\pi}})^2$ は $\hat{H}$ と可換な保存量である．つぎに

$$\dot{\hat{\pi}}^i = \frac{e}{mc}\sum_{j=1}^{3}\hat{\pi}^j(\nabla^i A^j(\hat{\vec{x}}) - \nabla^j A^i(\hat{\vec{x}})) = \frac{e}{mc}\epsilon^{ijk}\hat{\pi}^j B^k = \frac{e}{mc}(\hat{\vec{\pi}}\times\vec{B})^i \ , \tag{65}$$

$$\dot{\hat{S}}^i = \frac{e}{mc}\sum_{j=1}^{3}\hat{S}^j(\nabla^i A^j(\hat{\vec{x}}) - \nabla^j A^i(\hat{\vec{x}})) = \frac{e}{mc}\epsilon^{ijk}\hat{S}^j B^k == \frac{e}{mc}(\hat{\vec{S}}\times\vec{B})^i \tag{66}$$

を導け．これにもとづき $\sum_{i=1}^{3}\hat{\pi}^i\hat{S}^i$ がハミルトニアンと可換な運動の恒量であることを示せ．一定磁場中では荷電粒子は螺旋運動をする．またスピンはラーマーの歳差運動をする．上の２式はこれらの周期運動の周期が等しいことを示している．このことは，電子のスピンが最初運動の方向を向いていたら，磁場によって運動の方向が変化しても，スピンは依然として運動の方向を向いていることを意味する．これは電子の磁気モーメントが $\mu_{\mathrm{e}} = e\hbar/(2mc)$ であることによる．しかし，この値は場の量子論の量子補正による，異常磁気モーメントによって 0.1% ほどずれる．その結果，実際の運動ではスピンの方向は時間とともに少しずつずれてくる．

(V-5-3) 水素原子のハミルトニアン

$$\mathcal{H}_0 = \frac{1}{2m}\vec{p}^2 - \frac{e^2}{4\pi r} \tag{67}$$

の固有状態を，主量子数 $n(=1,2,3,\cdots)$，軌道角運動量 $l(=0,1,\cdots,n-1)$，軌道磁気量子数 $m(=-l,\cdots,l)$ で $|n,l,m\rangle$ と表すと，エネルギー固有値は主量子数 n のみで定まり

$$E_0(n) = -\frac{e^2}{8\pi a_0}\frac{1}{n^2} \ , \qquad a_0 \equiv \frac{4\pi\hbar^2}{me^2} \quad (\text{Bohr 半径}) \tag{68}$$

である．ディラック方程式にもとづき $\mathcal{H}_0$ に加わる相対論的効果を加えると

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \Delta\mathcal{H} \ , \tag{69}$$

$$\Delta\mathcal{H} = -\frac{1}{8m^3c^2}(\vec{p}^{\,2})^2 + \frac{\hbar^2 e^2}{8m^2c^2}\delta^3(\vec{x}) + \frac{e^2}{8\pi m^2 c^2}\frac{1}{r^3}\vec{S}\cdot\vec{L} \tag{70}$$

となる．全角運動量 $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ が $\mathcal{H}$ と可換 $[\vec{J}, \mathcal{H}] = 0$ であることを確かめよ．したがって，全角運動量が $j = l + 1/2$ と $j = l - 1/2$ の状態 ($l = 0$ のときは $j = 1/2$ のみ) がハミルトニアンの固有状態になる．$\Delta\mathcal{H}$ の第 3 項 (L-S 結合) の 1 次の摂動に注目しよう．

$$\vec{S}\cdot\vec{L} = \frac{1}{2}\left(\vec{J}^{\,2} - \vec{L}^{\,2} - \vec{S}^{\,2}\right) = \begin{cases} \frac{\hbar^2}{2} l & : \ j = l + \frac{1}{2} \\ -\frac{\hbar^2}{2}(l+1) & : \ j = l - \frac{1}{2} \end{cases} \tag{71}$$

を確かめよ．$l \neq 0$ のとき，これら 2 種の状態のエネルギー固有値の差

$$\begin{aligned} \Delta E_{nl} &\equiv E(n, j = l + 1/2) - E(n, j = l - 1/2) = \frac{e^2\hbar^2}{8\pi m^2 c^2}\frac{2l+1}{2}\langle n, l, m|\frac{1}{\hat{r}^3}|n, l, m\rangle \\ &= -E_0(n)\left(\frac{e^2}{4\pi\hbar c}\right)^2 (l + 1/2)\ \langle n, l, m|\frac{a_0^3}{\hat{r}^3}|n, l, m\rangle \end{aligned} \tag{72}$$

を導け．この差は微細構造と呼ばれる．

計算は省くが，(70) の摂動の 1 次をすべて含めると，エネルギー固有値は

$$E(n, j) = -\frac{e^2}{8\pi a_0}\frac{1}{n^2}\left(1 + \left(\frac{e^2}{4\pi\hbar c}\right)^2 \frac{1}{n}\left(\frac{1}{j + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4n}\right) + \cdots\right) \tag{73}$$

となり，エネルギーは l には陽に依存しなくなる．$\alpha \equiv e^2/(4\pi\hbar c) \cong 1/137$ は微細構造定数と呼ばれる．

(VI-1-1) 電磁場 $A_\mu(x)$ 中の電子のディラック方程式は

$$\left(i\hbar\gamma^\mu\left(\partial_\mu + i\frac{e}{c\hbar}A_\mu(x)\right) - mc\right)\psi(x) = 0 \tag{74}$$

である．$\psi(x)$ の荷電共役を，γ^0 の転置行列 γ^{0T}，および

$$C^{-1}\gamma^\mu C = -\gamma^{\mu T} \quad (\mu = 0, 1, 2, 3) \tag{75}$$

を実現する荷電共役行列 C をもちいて

$$\psi_c(x) = C\gamma^{0T}\psi^*(x) \tag{76}$$

と定義すると，$\psi_c(x)$ が電子と逆の電荷の粒子 (陽電子) のディラック方程式

$$\left(i\hbar\gamma^\mu\left(\partial_\mu - i\frac{e}{c\hbar}A_\mu(x)\right) - mc\right)\psi_c(x) = 0 \tag{77}$$

を満たすことを示せ．またディラック行列 γ^μ の標準表示のとき

$$C = i\gamma^2\gamma^0 \tag{78}$$

が (75) を再現することを確かめよ．